CHAPITRE V

RELATIONS CONTRAINTES-DEFORMATIONS
TENSEUR ELASTICITE

V.1- Loi de Hooke

Un solide soumis à une contrainte se déforme, mais si la contrainte inférieure à une valeur limite appelée "limite d'élasticité" la déformation est réversible c'est-à-dire que le solide reprend sa forme initiale si on cesse d'exercer la contrainte.
De plus, si la contrainte est assez faible, la déformation est proportionnelle à la contrainte appliquée : c'est la loi de Hooke qui s'écrit dans le cas d'une barre isotrope soumise à une tension pure.

$$\varepsilon = s\sigma$$
$$\sigma = c\varepsilon \qquad c = \frac{1}{s}$$

σ : contrainte
ε : allongement unitaire = $\frac{\Delta l}{l}$

C = module d'élasticité ou rigidité (module d'Young) } constantes
s = complaisance (ou compliance) ou élasticité } d'élasticité

On peut évidemment généraliser ces notions. Nous savons qu'une contrainte et une déformation homogène peuvent être représentées par un tenseur de rang 2.
Si on applique au cristal σ_{ij}, la déformation homogène ε_{ij} est reliée aux composantes de la contrainte par une relation linéaire:

$$\varepsilon_{11} = s_{1111}\sigma_{11} + s_{1112}\sigma_{12} + s_{1113}\sigma_{13} + s_{1121}\sigma_{21} + s_{1122}\sigma_{22} + s_{1123}\sigma_{23} + s_{1131}\sigma_{31} + s_{1132}\sigma_{32} + s_{1133}\sigma_{33}$$

et 8 autres équations semblables, les s étant des constantes.

Ainsi la loi de Hooke généralisée s'écrit :

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}\,\sigma_{kl}} \qquad (1) \quad \text{avec 81 coefficient } s_{ijkl}$$

et sous la forme (2) correlative de (1)

$$\boxed{\sigma_{ij} = c_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}} \qquad (2)$$

Les coefficients c_{ijkl} sont des fonctions linéaires des s_{ijkl}

Remarque importante

Dans le cas général, on remarque, que si l'on applique une contrainte de traction uniaxiale σ_{11}, toutes les composantes de déformation sont différentes de 0 d'après (1). Cela veut dire que la déformation n'est pas uniquement un allongement dans le sens de la contrainte, mais également une contraction perpendiculaire accompagnée de cisaillement.

V.2.- Signification géométrique

On soumet le solide à des contraintes simples.
Par exemple, on applique une contrainte de cisaillement σ_{12} (ce qui entraine aussi σ_{21} comme nous l'avons vu au chapitre II, sauf en présence d'un champ de moment) : il vient :

$$\varepsilon_{11} = s_{1112}\sigma_{12} + s_{1121}\sigma_{21} = (s_{1112} + s_{1121})\sigma_{12}$$

Il est impossible de faire une expérience permettant de séparer s_{ijkl} de s_{ijlk}.

On admettra donc que : $\boxed{s_{ijkl} = s_{ijlk}}$ (3)

Si d'autre part, on applique une tension uniaxiale parallèle à Ox_3 : σ_{33}, il vient :

$$\varepsilon_{11} = s_{1133}\sigma_{33} \qquad \varepsilon_{22} = s_{2233}\sigma_{33} \qquad \text{etc...}$$

et en particulier $\varepsilon_{12} = s_{1233}\sigma_{33}$ et $\varepsilon_{21} = s_{2133}\sigma_{33}$

Comme $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$ (c.f. chapitre III), on a $s_{1233} = s_{2133}$

donc $$\boxed{s_{ijkl} = s_{jikl}} \qquad (4)$$

Les relations (3) et (4) ont pour conséquence de faire passer le nombre des composantes s_{ijkl} indépendantes de 81 à 36, ce qui est assez évident car il s'agit de relier les 6 composantes indépendantes du tenseur des contraintes aux 6 composantes du tenseur des déformations : Le même raisonnement que précédemment montre que :

$$\boxed{c_{ijkl} = C_{ijlk}} \qquad (5)$$

$$\boxed{c_{ijkl} = C_{jikl}} \qquad (6)$$

d'où 36 composantes c_{ijkl}

V.3.- Les élasticités forment un tenseur de rang 4

Les 81 s_{ijkl} forment un tenseur de rang 4 si par changement d'axes leurs transformées sont s'_{ijkl} telles que (c.f. chapitre I).

$$s'_{ijkl} = a_{im}\, a_{jn}\, a_{ko}\, a_{ep}\, s_{mnop}$$

Dans le premier système $[\varepsilon_{ij}]$ est relié à $[\sigma_{ij}]$ par $[s_{ijkl}]$

Dans le second " $[\varepsilon'_{ij}]$ est relié à $[\sigma'_{ij}]$ par $[s'_{ijkl}]$

On a $\varepsilon'_{ij} = a_{ik} a_{jl} \varepsilon_{kl}$ $\qquad \varepsilon_{kl} = s_{klmn}\, \sigma_{mn}$

$$\sigma_{mn} = a_{om}\, a_{pn}\, \sigma'_{op}$$

En combinant les équations précédentes selon la suite :

$$\varepsilon' \rightarrow \varepsilon \rightarrow \sigma \rightarrow \sigma'$$

il vient : $\varepsilon'_{ij} = a_{ik}\, a_{jl}\, s_{klmn}\, a_{om}\, a_{pn}\, \sigma'_{op}$

mais $\varepsilon'_{ij} = s'_{ijop}\, \sigma'_{op}$

d'où $$s'_{ijop} = a_{ik}\, a_{jl}\, a_{om}\, a_{pn}\, s_{klmn}$$

ou par changements des indices muets :

$$\boxed{s'_{ijkl} = a_{im}\, a_{jn}\, a_{ko}\, a_{lp}\, s_{mnop}} \qquad (7)$$

Donc s_{ijkl} est un tenseur de rang 4. L'équation (7) résume 3^4 équations dont chacune comporte au second membre 3^4 termes, soit en tout 3^8 termes = 6561.
On montre de la même façon que les rigidités forment un tenseur de rang 4.
Cette propriété est générale : si 2 termes de rang 2 sont reliés par une équation du type

$$A_{ij} = C_{ijkl}\, B_{kl}, \quad C_{ijkl} \text{ est un tenseur de rang 4}$$

V.4.- Notation matricielle

En ce qui concerne les deux premiers et les deux derniers indices, les s_{ijkl} et les C_{ijkl} sont symétriques. Ceci permet l'utilisation d'une notation plus concise qu'on appelle notation matricielle. Nous avons écrit jusqu'ici toutes les équations sous forme développée, en notation tensorielle, parceque c'est la seule façon de mettre en évidence leur caractère exact, et particulièrement leurs propriétés de transformation. Mais pour résoudre des problèmes particuliers, il est avantageux de réduire le nombre des indices.
Le tableau de correspondance entre ces indices est le suivant ;

Notation tensorielle	11	22	33	23-32	31-13	12-21	(8)
Notation matricielle	1	2	3	4	5	6	

Ainsi les composantes de contrainte et de déformation sont écrites avec un indice unique allant de 1 à 6 : on a la substitution

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_5 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

On verra pourquoi on introduit les coefficients $\frac{1}{2}$ pour le tenseur $\left[\varepsilon_{ij}\right]$

En outre, on introduit les facteurs 2 et 4 comme suit : (notation de Voigt)

$s_{ijkl} = s_{mn}$ quand m et n ont pour valeur 1, 2, 3

$2s_{ijkl} = s_{mn}$ quand m ou n a pour valeur 4, 5 ou 6

$4s_{ijkl} = s_{mn}$ quand m et n ont pour valeur 4, 5 ou 6

Reprenons l'expression (1) et développons la en ε_{11} et ε_{33}

$$\varepsilon_{11} = s_{1111}\sigma_{11} + s_{1112}\sigma_{12} + s_{1113}\sigma_{13} + s_{1121}\sigma_{21} + s_{1122}\sigma_{22} + s_{1123}\sigma_{23} + s_{1131}\sigma_{31} + s_{1132}\sigma_{32} + s_{1133}\sigma_{33}$$

$$\varepsilon_{23} = s_{2311}\sigma_{11} + s_{2312}\sigma_{12} + s_{2313}\sigma_{13} + s_{2321}\sigma_{21} + s_{2322}\sigma_{22} + s_{2323}\sigma_{23} + s_{2331}\sigma_{31} + s_{2332}\sigma_{32} + s_{2333}\sigma_{33}$$

En notation matricielle, ces deux équations s'écrivent :

$$\varepsilon_1 = s_{11}\sigma_1 + \frac{1}{2}s_{16}\sigma_6 + \frac{1}{2}s_{15}\sigma_5 + \frac{1}{2}s_{16}\sigma_6 + s_{12}\sigma_2 + \frac{1}{2}s_{14}\sigma_4 + \frac{1}{2}s_{15}\sigma_5 + \frac{1}{2}s_{14}\sigma_4 + s_{13}\sigma_3$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_4 = \frac{1}{2}s_{41}\sigma_1 + \frac{1}{4}s_{46}\sigma_6 + \frac{1}{4}s_{45}\sigma_5 + \frac{1}{4}s_{46}\sigma_6 + \frac{1}{2}s_{42}\sigma_2 + \frac{1}{4}s_{44}\sigma_4 + \frac{1}{4}s_{45}\sigma_5 + \frac{1}{4}s_{44}\sigma_4 + \frac{1}{2}s_{43}\sigma_3$$

ou $\varepsilon_1 = s_{1j}\sigma_j$ et $\varepsilon_4 = s_{4j}\sigma_j$

l'équation (1) prend donc la forme abrégée

$$\boxed{\varepsilon_i = s_{ij}\,\sigma_j} \qquad (i,j = 1.....6) \qquad (10)$$

On voit que l'introduction des facteurs 2 et 4 dans les expressions de s_{ij} et $\frac{1}{2}$ dans celles de ε_{ij} a pour but d'écrire (10) sous une forme simple.
Pour les c_{ijkl}, des facteurs 2 et 4 ne sont pas nécessaires. On pose simplement :

$c_{ijkl} = c_{mn}$ suivant le tableau (8)

$i, j, k, l = 1,2,3 \qquad m,n = 1.....6$

Il vient alors

$$\boxed{\sigma_i = c_{ij}\,\varepsilon_j} \qquad (i,j = 1.....6) \qquad (11)$$

Les tableaux des s_{ij} et c_{ij} s'écrivent classiquement sous la forme carrée :

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & \times & \times & \times & \times & \times \\ s_{51} & \times & \times & \times & \times & \times \\ s_{61} & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & \times & \times & \times & \times & \times \\ c_{51} & \times & \times & \times & \times & \times \\ c_{61} & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

Ces tableaux sont les matrices (s_{ij}) et (c_{ij})

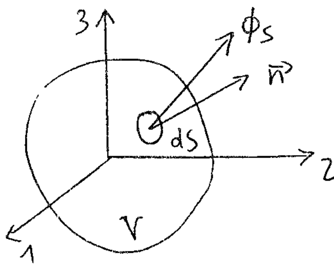
Remarque importante

Malgré les apparences, les s_{ij} et les c_{ij} à deux indices ne sont pas les composantes d'un tenseur de rang deux et ne se transforment pas comme tels. Il faut revenir à la notation tensorielle avant de les transformer dans un autre système d'axes.

V.5.- Thermodynamique de la déformation

Travail des contraintes agissant sur un élément de volume (V)

Considérons un élément de volume V. Comme nous l'avons vu au chapitre II, et III ce volume est soumis à des forces de volume $\vec{F}_V\, dV$ et des forces de surface $\vec{\phi}_S\, ds$.



L'orientation de l'élément de surface dS est définie par le vecteur normal $\vec{n}$ orienté > 0 vers l'extérieur de V : ($\vec{n}$ a pour composantes n_j).

Nous avons vu au chapitre III que les composantes de $\vec{\phi}_s \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$ sont égales à :

$$X_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{ou} \quad X_i dS = \sigma_{ij} n_j dS = \sigma_{ij} dS_j$$

Suivons à présent la déformation du corps et supposons que le vecteur déformation $\overline{u}$ varie d"une petite quantité $\delta\overline{u}$. Les forces de volume et de surface travaillent : calculons ce travail δW.

$$\text{on a : } \quad \delta W = \int_V F_v \, \delta\overline{u} \, dv + \int_S \overline{\phi}_S \, \delta\overline{u} \, dS$$

$$\text{ce qui s'écrit} \quad \delta W = \int_V F_{vi} \, \delta u_i \, dV + \int_S \sigma_{ij} \, \delta u_i \, dS_j \qquad (12)$$

Appliquons le théorème d ' OSTROGRADSKY

$$\int_V \text{div } \vec{a} \, dv = \int_S \vec{a} \cdot \vec{dS}$$

(qui s'énonce : le flux d'un vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur dans le;volume limité par la surface).

div a est un scalaire $\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$

La seconde intégrale de l'équation (12) s'écrit donc :

$$\int_S \sigma_{ij} \, \delta u_i \, dS_j = \int_V \text{div } (\sigma_{ij} \, \delta u_i) \, dv \qquad (13)$$

$\sigma_{ij} \, \delta u_i$ étant un vecteur : $t_j = \sigma_{ij} \delta u_i$ $\qquad$ $\text{div } t_j = \frac{\partial t_j}{\partial x_j}$

$$\text{On a div } (\sigma_{ij} \, \delta u_i) = \sigma_{ij} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \, \delta u_i \qquad (14)$$

(On applique les règles de la dérivation d'un produit).

L'équation (12) s'écrit donc :

$$\delta W = \int_V F_{vi} \, \delta u_i \, dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \, \delta u_i \, dV + \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_j} \, dV \qquad (15)$$

$$= \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_j} \, dv \qquad (15')$$

car nous avons vu au chapitre III(relationIII.18) que les équations d'équilibre s'écrivaient :

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{xj} + F_{vi} = 0$$

la somme des deux premiers termes de (15) est donc nulle et il ne reste que la troisième intégrale de (15).

D'après le chapitre IV équation (1) : $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \bar{\omega}_{ij}$

donc : $$\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial xj} = \delta(\varepsilon_{ij} + \bar{\omega}_{ij})$$

$$\delta W = \int_V (\sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}\,\delta\bar{\omega}_{ij})\,dV \qquad (16)$$

quand il n'y a pas de couples de volumes $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

mais $\bar{\omega}_{ij}$ est antisymétrique, donc $\sigma_{ij}\,\delta\bar{\omega}_{ij} = 0$

On obtient ainsi la densité d'énergie emmagasinée (énergie par unité de volume)

$$\boxed{\delta W = \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}} \qquad (17)$$

ou en notation matricielle $\delta W = \sigma_i d\varepsilon_i$ $(i = 1......6)$

Définition thermodynamique de l'élasticité

Si la déformation est assez petite, le corps revient à son état initial non déformé quand les forces extérieures responsables de la déformation sont supprimées : on a alors des déformations élastiques (dans le cas contraire, on a une déformation résiduelle : déformations plastiques).
Supposons que la déformation soit assez lente pour qu'à chaque instant l'état d'équilibre thermodynamique soit établi : la transformation est dite réversible.
On conviendra de rapporter les grandeurs thermodynamiques (l'énergie interne E, l'entropie S etc....) à l'unité de volume du corps non déformé* et de les désigner par des majuscules.

* - C'est à dire à la quantité de matière que ce volume contient. Le volume après déformation sera quelque peu différent du volume initial. L'énergie totale du corps sera obtenue en intégrant E dans le volume du corps non déformé.

D'après le premier principe de thermodynamique, on peut écrire :

$$dE = dQ - dW$$

dQ = quantité de chaleur reçue par le système (par unité de volume)

dW = travail effectué par le système (travail des contraintes internes ou travail fourni.)

Dans une transformation réversible dQ = TdS

soit :
$$dE = TdS + \sigma_{ij}\, d\, \varepsilon_{ij} \qquad (18)$$

C'est la relation thermodynamique fondamentale pour les corps déformables.

En compression hydrostatique, nous avons vu que $\sigma_{ij} = - p\delta_{ij}$ (chap. II)

soit :
$$\sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} = - p\delta_{ij} d\varepsilon_{ij} = -p\, d\varepsilon_{ii}$$

Mais on sait que $\varepsilon_{ii} = \frac{\Delta V}{V_o}$ (trace du tenseur = variation relative du volume).
Si $V_o = 1$, $\varepsilon_{ii} = \Delta V$ et $d\varepsilon_{ii}$ sera l'élement dV de cette variation ($V = V_o + \Delta V = 1 + \varepsilon_{ii}$ $dV = d\varepsilon_{ii}$).

On retrouve ainsi l'expression classique

$$dE = TdS - pdV$$

Au lieu de l'énergie interne E, on peut introduire l'énergie libre d' HELMHOLTZ

$$F = E - TS$$

On a alors : $dF = dE - TdS - SdT$

$$dF = - SdT + \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} \qquad (19)$$

Enfin, il est parfois utile de disposer du potentiel thermodynamique Φ ou enthalpie libre :

$$\Phi = E + pV - TS = F + pV$$

il vient :
$$\Phi = E - TS - \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij} \qquad (20)$$

Remarque : en compression uniforme, l'expression (20) s'écrit

$$\Phi = F + p\varepsilon_{ii} = F + p\ (V - V_o)$$

$\Delta V = V - V_o$ étant la variation de volume durant la déformation. On voit que notre définition de Ø diffère de celle adoptée habituellement en thermodynamique $\Phi = F + pV$ par le terme $-pV_o$.
En différentiant (20) , on a : $d\Phi = dF - \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}\, d\sigma_{ij}$

$$d\Phi = -\ SdT - \varepsilon_{ij}\, d\sigma_{ij} \qquad (21)$$

les variables indépendantes dans les équations (18) et (19) sont respectivement S, ε_{ij} et T, σ_{ij}.
On peut tirer des expressions précédentes les composantes du tenseur des contraintes ou du tenseur des déformations:

$$* \qquad \sigma_{ij} = \left(\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_T \qquad (22)$$

$$* \qquad \varepsilon_{ij} = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}}\right)_T \qquad (23)$$

Tenseur des constantes élastiques

Nous allons chercher à retrouver la relation élémentaire linéaire ou loi de Hooke posée à priori au début de ce chapitre pour décrire la relation entre l'effort et la déformation
Nous nous placerons d'abord dans le cas d'une déformation isotherme et nous exprimerons l'énergie libre du solide en fonction de la déformation sous la forme d'un développement en puissances croissantes de e_{ij} ; (le développement étant effectué au voisinage de l'état initial) afin de pouvoir appliquer les relations thermodynamiques générales.

Développement en série de Mac-Laurin :

$$f(z) = f(0) + z f'(0) + \dots + \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots\dots$$

$$F = Fo + \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{T_o} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij}\, \partial \varepsilon_{kl}}\right]_{T_o} \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{kl} + \dots\dots\dots \qquad (24)$$

$$\Sigma_{ij} \qquad\qquad \Sigma_{ijkl}$$

Si on prend comme état initial l'état non déformé (en l'absence de forces extérieures). Il vient :

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_T\right]_o = \left[\sigma_{ij}\right]_o = 0 \qquad \text{d'après (22)}$$

Donc le coefficient du terme linéraire est nul.

Si on se limite au 2ème ordre et en dérivant, il vient :

$$dF = \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}\right)_T\right]_o \varepsilon_{kl}\, d\varepsilon_{ij}$$

Or on a dans les conditions isothermes, l'équation (22)

$$dF = \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} \qquad (22)$$

En identifiant (25) et (22), on trouve la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}\right)_T\right]_o \varepsilon_{kl}$$

Le tenseur des contraintes est une fonction linéaire du tenseur des déformations (valable pour les petites déformations).

avec $\sigma_{ij} = c_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}$

soit

$$c^{(T)}_{ijkl} = \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}\right)_T\right]_o \qquad (26)$$

Les constantes élastiques introduites au début de ce chapitre comme des coefficients phénoménologiques reliant en première approximation les contraintes et les déformations ont maintenant une signification physique, puisqu'on peut les calculer si on sait calculer l'énergie libre.
C'est le cas de certains métaux pour lesquels on connait d'une façon raisonnable le potentiel interionique et l'énergie du gaz d'électron.
On obtient donc des valeurs correctes en dérivant les diverses contributions à l'énergie libre totale du solide.
Cependant, il faut bien noter que la théorie de l'élasticité ne s'intéresse pas à la nature ou à l'origine des constantes élastiques. Dans ce cadre, le solide est un milieu continu doué de propriétés élastiques représentées par des constantes élastiques. Il faut donc bien prendre garde quand on applique cette théorie à des milieux cristallins de considérer le solide comme un milieu continu. La théorie de l'élasticité ne s'appliquera donc que sur des distances grandes devant les distances interatomiques, et si les déformations peuvent être regardées comme constantes dans les domaines de l'ordre de quelques dizaines d'Å.

Remarque 1 : constantes élastiques isotherme et adiabatique

On a défini les constantes élastiques isothermes : $C^{(T)}_{ijkl}$ (26). On aurait pu définir les constantes élastiques adiabatiques :

$$C^{(S)}_{ijkl} = \left[\left(\frac{\partial^2 E}{\partial\varepsilon_{ij}\,\partial\varepsilon_{kl}}\right)_S\right]_o$$

On mesure les constantes élastiques adiabatiques par des méthodes dynamiques et les constantes isothermes par des méthodes quasi statiques. En général $C^{(S)}_{ijkl}$ sont $> C^{(T)}_{ijkl}$.

Remarque 2 : Elasticité non linéaire

Si au lieu de s'arrêter au second ordre en différentiant (24) on était allé jusqu'au 3ème ordre dans le développement de l'énergie, on aurait construit une théorie de l'élasticité non linéaire avec :

$$\sigma_{ij} = C_{ijlk}\,\varepsilon_{kl} + C_{ijmnop}\,\varepsilon_{mn}\varepsilon_{op}$$

$$\text{ou } C_{ijmnop} = \left[\left(\frac{\partial^3 F}{\partial\varepsilon_{ij}\,\partial\varepsilon_{mn}\,\partial\varepsilon_{op}}\right)_T\right]_o \qquad (27)$$

sont les constantes élastiques du 3ème ordre.

Remarque 3 - Simplication du tableau des constantes élastiques

Reprenons l'expression (26)

$$C_{ijkl}^{(T)} = \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\right)_T\right]_o \qquad i,j,k,l \quad 1,2,3$$

Il est bien évident que l'ofdre de la dérivation n'intervient pas et que

$$\boxed{C_{ijkl}^{(T)} = C_{klij}^{(T)}} \qquad (28)$$

ou en notion matricielle $\boxed{C_{ij} = C_{ji}}$ (28)

On pourrait démontrer de même que $\boxed{s_{ij} = s_{ji}}$ (matrice inverse)

Dans ces conditions, les constantes élastiques indépendantes ne sont plus que 21 au lieu de 36.

Cas le plus général

C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}
X	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{25}	C_{26}
X	X	C_{33}	C_{34}	C_{35}	C_{36}
X	X	X	C_{44}	C_{45}	C_{46}
X	X	X	X	C_{55}	C_{56}
X	X	X	X	X	C_{66}

Remarque 4 : L'énergie libre élastique d'un solide déformé/unité volume.

Dans le cas isotherme, on a d'après (22)

$$F = \int_o^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} \quad \delta\varepsilon_{ij} = \int_o^{\varepsilon_{ij}} C_{ijkl}\ \varepsilon_{kl}\ d\varepsilon_{ij}$$

notation matricielle $F = \int_o^{\varepsilon_i} C_{ij}\varepsilon_j d\varepsilon_i = \frac{1}{2} C_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j$ (29)

indices muets : i et j

car $d\,(\varepsilon_j\varepsilon_i) = \varepsilon_j\ d\varepsilon_i + \varepsilon_i\ d\varepsilon_j$

$= 2\ \varepsilon_j\ d\varepsilon_i$

en notation tensorielle $\frac{1}{2} C_{ijkl}\ \varepsilon_{ij}\ \varepsilon_{kl}$ indices muets ijkl

C'est l'énergie élastique de déformation/ unité volume : toujours > 0

V.6.- Effet de la symétrie du cristal

Les éléments de symétrie du cristal réduisent encore le nombre de variables indépendantes s_{ij} et c_{ij}.
Notons d'abord que l'élasticité est une propriété centro-symétrique : La symétrie opérée par rapport à un centre de symétrie sur les contraintes et les déformations ne produit aucune modification, parce que l'état de contrainte ou de déformation homogènes possède déjà un centre de symétrie.* Il en est de même pour l'élasticité , ∀ la symétrie du cristal. L'élasticité est donc une propriété centro symétrique : si les axes de référence sont transformés par une symétrie centrale, les composantes s_{ijkl} et c_{ijkl} restent inchangées.
La démonstration est simple : les éléments a_{ij} de la matrice de transformations sont égaux à $-\delta_{ij}$.
D'après la loi de transformation (7), on a $s'_{ijkl} = \delta_{im}\,\delta_{jn}\,\delta_{ko}\,\delta_{lp}\,s_{mnop}$

$$= s_{ijkl}$$

De même pour les c_{ijkl}

Les éléments de symétrie autres qu'un centre imposent aux constantes des conditions que nous allons étudier.

Méthode analytique : Cette méthode de calcul systématique est la méthode la plus rapide pour déterminer les coefficients indépendants de toutes les classes (sauf les systèmes rhomboédrique et hexagonal). Cette méthode consiste à transformer les axes de référence du tenseur selon l'un des éléments de symétrie du cristal : les coefficients doivent être les mêmes avant et après transformation.

* - Toutes les propriétés traduites par des tenseurs de rang 2 sont centro-symétrique. En effet l'équation $p_i = T_{ij}\,q_j$ reste satisfaite pour les mêmes valeurs de T_{ij} si on change les directions de $\overline{p}$ et $\overline{q}$: les signes de p_i et q_i changent. La propriété représentée par T_{ij} reste inchangée.

Prenons l'exemple de la classe 4 : l'axe 4 étant parallèle à Ox_3, les axes se transforment selon :

$x_1 \rightarrow x_2$

$x_2 \rightarrow -x_1$

$x_3 \rightarrow x_3$

se transforme en

$x_1 \rightarrow x_2 \quad x_2 \rightarrow -x_1 \quad x_3 \rightarrow x_3$ (30)

ou sous une forme abrégée

$1 \rightarrow 2 \quad 2 \rightarrow -1 \quad 3 \rightarrow 3$

Les composantes d'un tenseur se transforment comme les produits de coordonnées correspondants (voir chapitre I)
Nous devons prendre les modules un par un et les transformer selon (30). Si le signe du module change, le module doit être nul (car ceci signifie qu'une même cause produirait l'effet inverse après une opération de symétrie. Or par définition même cette cause doit produire le même effet après une opération de symétrie qui conserve le cristal). Si le signe du module est le même, le module existe.
Dans la notation à quatre indices, les groupes de deux indices se transforment selon :

$11 \rightarrow 22 \quad 22 \rightarrow 11 \quad 33 \rightarrow 33 \quad 23 \rightarrow -13 \quad 31 \rightarrow +32 \quad 12 \rightarrow -21$

Dans la notation à deux indices : les transformations sont données par :

$1 \rightarrow 2 \quad 2 \rightarrow 1 \quad 3 \rightarrow 3 \quad 4 \rightarrow -5 \quad 5 \rightarrow 4 \quad 6 \rightarrow -6$

En écrivant le tableau complet des C_{ij} ou des s_{ij} : les indices se transforment

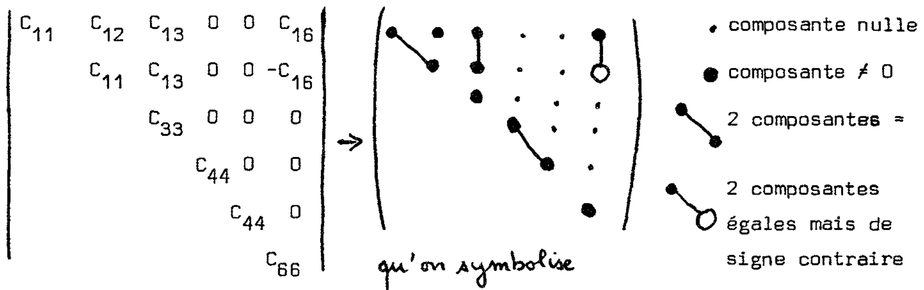
22	21	23	-25	24	-26
	11	13	-15	14	-16
		33	-35	34	-36
			55	54	56
				44	46
					66

on ne considère que les 21 coefficients de la matrice symétrique

en égalant de tableau composante par composante ou tableau original

11	12	13	14	15	16
	22	23	24	25	26
		33	34	35	36
			44	45	46
				55	56
					66

il vient :



d'où seulement 7 modules indépendants.

En effet - les coefficients qui se transforment en eux-mêmes sont conservés :

ex : $C_{66} = C_{66}$

- les coefficients C_{ij} transformés en C_{ji} sont conservés : puisque $C_{ij} = C_{ji}$.
- Deux coefficients se transforment l'un dans l'autre

$C_{11} \rightarrow C_{22}$

$C_{22} \rightarrow C_{11}$ donc se conservent et $C_{11} = C_{22}$

- 2 coefficients se transforment l'un dans l'autre mais avec changement de signe.

$C_{16} \rightarrow -C_{26}$

$C_{26} \rightarrow -C_{16}$ se conservent et $C_{16} = -C_{26}$

- ceux qui se transforment en leur inverse

$C_{36} \rightarrow -C_{36}$ $C_{36} = 0$

$C_{ij} \rightarrow -C_{ji}$ $C_{ij} = 0$ $C_{45} \rightarrow -C_{54}$ $C_{45} = 0$

- Les groupes de deux qui se transforment l'un dans l'autre, mais non symétriquement.

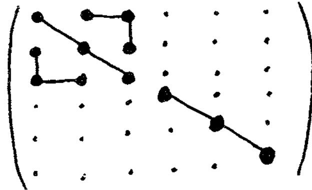
$C_{34} \rightarrow -C_{35}$

$C_{35} \rightarrow C_{34}$ $C_{35} = C_{34} = 0$

En effectuant la même opération sur les autres éléments de symétrie, on peut déterminer la forme des matrices (s_{ij}) et (c_{ij}) pour toutes les classes cristallines (voir Annexe II)

Remarque : pour les systèmes rhomboédriques et hexagonal, la méthode n'est pas valable car les éléments de symétrie ne changent pas uniquement l'ordre des axes. (dans les autres systèmes chaque axe se transforme en l'un des autres axes, mais ne prend pas de direction intermédiaire.

Ainsi, dans le cas du système cubique, on peut montrer qu'on a seulement trois modules indépendants.



(31)

valable pour c_{ij} ou s_{ij}

V.7.- Cas des solides isotropes.

Nous pouvons passer du système cubique au solide isotrope en cherchant la relation qui doit exister entre les constantes élastiques d'un cristal cubique puisque celui-ci est élastiquement isotrope.
L'énergie libre dans le système cubique est égale d'après (29) et en tenant compte du tableau ci-dessus:

$$F = \frac{1}{2}\Big(C_{11}\,\varepsilon_1^2 + C_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_1\varepsilon_3 + 0$$

$$+ C_{12}\,\varepsilon_2\varepsilon_1 + C_{11}\varepsilon_2^2 + C_{12}\varepsilon_2\varepsilon_3 + 0$$

$$+ C_{12}\varepsilon_3\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_3\varepsilon_2 + C_{11}\varepsilon_3^2 + 0$$

$$+ C_{44}\,\varepsilon_4^2 + 0$$

$$+ C_{44}\,\varepsilon_5^2 + 0$$

$$+ C_{44}\,\varepsilon_6^2 + 0 \Big)$$

ce qui s'écrit : $F = \frac{1}{2} C_{11} \left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_2^2\right) + \frac{1}{2} C_{44}\left(\varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 + \varepsilon_6^2\right)$

$$+ C_{12} \left(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1\right) \qquad (32)$$

ou en notation mixte souvent utilisée (notation matricielle pour les constantes élastiques et tensorielle pour les déformations).

$$2F = C_{11} \left(\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2 +\varepsilon_{33}^2\right)+ 2C_{12}\left(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} +\varepsilon_{33}\varepsilon_{11}\right) + 4 C_{44}\left(\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{23}^3+\varepsilon_{31}^2\right)$$

car $\varepsilon_4 = 2 \varepsilon_{23}$

$\varepsilon_5 = 2 \varepsilon_{13}$ (33)

$\varepsilon_6 = 2 \varepsilon_{12}$

Si le solide est isotrope, la valeur de l'énergie libre doit être indépendante de l'orientation du tenseur des déformation donc F doit s'exprimer uniquement en fonction des invariants de ce tenseur. Nous avons vu déjà un invariant d'un tenseur : ε_{ii}. (cf chap I in II du III)

Il vient :
$$2F = C_{11}\, I_1^2 - 4\, C_{44}\, I_2 + 2\,(2C_{44} - C_{11} + C_{12})\left[\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}\right] \qquad (34)$$

avec $I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ et $I_2 = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{13}^2 - \varepsilon_{23}^2$

Le dernier terme doit être nul donc la condition d'isotropie s'écrira :

$$C_{44} = \frac{1}{2}\left(C_{11} - C_{12}\right) \qquad (35)$$

La quantité $A = \dfrac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}}$ est dite facteur d'anisotropie

A titre d'exemple voici les valeurs de A pour quelques cristaux cubiques.

Cristal	A	Cristal	A
Nb	0,5	C diamant	1,6
Ag Cl	0,5	Al	1,2
Na Cl	0,7	Fe	2,4
Cr	0,7	Ag	2,9
		Cu	3,3
W	1	Na	7,5
RbI	0,3	Li	9

Constantes élastiques des solides isotropes

Il n'existe donc plus que deux constantes élastiques non nulles dans le cas d'un solide isotrope.

La matrice des élasticités prend la forme.

avec $C_{44} = \frac{1}{2}\,(C_{11} - C_{12})$ X

ou $s_{44} = 2\,(s_{11} - s_{12})$ X

on pose
$$\left.\begin{aligned} C_{12} &= \lambda \\ C_{44} &= \mu \\ C_{11} &= \lambda + 2\mu \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

λ et μ sont dits coefficients de LAMÉ

(μ= module de cisaillement ou module de Coulomb).

Dans ces conditions, l'énergie libre d'un corps isotrope déformé s'écrit :

$$2F = (\lambda + 2\mu)\, I_1^2 - 4\mu\, I_2$$

$$= \lambda\, I_1^2 + 2\mu\, (I_1^2 - 2I_2)$$

$$I_1^2 - 2\, I_2 = (\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})^2 - 2\,(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11}) + 2\varepsilon_{12}^2 + 2\varepsilon_{13}^2 + 2\varepsilon_{23}^2$$

$$= \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2\varepsilon_{12}^2 + 2\varepsilon_{13}^2 + 2\varepsilon_{23}^2 = J_2 = \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^2$$

Ainsi $2F = \lambda I_1^2 + 2\mu\, J_2$

$$2F = \lambda\, (\varepsilon_{ii})^2 + 2\mu \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^2 \qquad (37)$$

On peut l'exprimer en fonction des contraintes

$$2F = \frac{1+\nu}{E} \sum_{ij} \sigma_{ij}^2 - \frac{\nu}{E} \sum_{i} \sigma_{ii}^2 \qquad (37)$$

A partir de la matrice des c_{ij} on peut donner l'expression des σ en fonction des ε. Dans ce cas particulier, on a

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= (\lambda+2\mu)\, \varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11} \\
\sigma_{22} &= \lambda\varepsilon_{11} + (2\mu+\lambda)\, \varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} = \lambda\theta + 2\mu\, \varepsilon_{22} \\
\sigma_{33} &= \lambda\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + (2\mu+\lambda)\, \varepsilon_{33} = \lambda\theta + 2\mu\, \varepsilon_{33} \\
\sigma_{23} &= 2\mu\varepsilon_{23} \\
\sigma_{13} &= 2\mu\varepsilon_{13} \\
\sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12} \\
\theta &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}
\end{aligned} \qquad (38)$$

car $\sigma_4 = C_{44}\varepsilon_4$

$\sigma_4 = 2C_{44}\, \varepsilon_{23}$

Ces relations sont connues sous le noms d'équations de LAME. Ces équations montrent immédiatement que les axes principaux des déformations sont confondues avec les axes principaux des contraintes.

Elles peuvent se mettre sous la forme condensée :

$$\boxed{\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\ \varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}} \qquad (38)$$

$\uparrow$
Σ_k

$\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$

$= 1$ $\quad i = j$

On aura de même : $\varepsilon_i = s_{ij}\varepsilon_j$ (en tenant compte de la matrice des s_{ij})

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = s_{11}\ \sigma_{11} + s_{12}\ \sigma_{22} + s_{12}\ \sigma_{33} \\ \varepsilon_{22} = s_{12}\ \sigma_{11} + s_{11}\ \sigma_{22} + s_{12}\ \sigma_{33} \\ \varepsilon_{33} = s_{12}\ \sigma_{11} + s_{12}\ \sigma_{22} + s_{11}\ \sigma_{33} \\ \varepsilon_{23} = (s_{11} - s_{12})\ \sigma_{23} \\ \varepsilon_{13} = (s_{11} - s_{12})\ \sigma_{13} \\ \varepsilon_{12} = (s_{11} - s_{12})\ \sigma_{12} \end{cases} \qquad (39)$$

On utilise souvent comme constantes élastiques le module d'Young E et le module de rigidité ou le coefficient de Poisson ν.
E est défini comme étant le rapport de la contrainte uniaxiale longitudinale (principale) σ_{11} exercée sur un prisme long à la déformation longitudinale (principale) résultante ε_{11} dans la même direction : ($\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0$).

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = \frac{1}{s_{11}} \qquad (40)$$

$\nu = -\dfrac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\dfrac{s_{12}}{s_{11}}$ = rapport changé de signe des déformations principales perpendiculaires et parallèles à la contrainte longitudinale uniaxiale principale exercée sur un prisme.

Ainsi les équations (39) s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right] \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})\right] \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\right] \\ \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2\mu} \\ \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2\mu} \\ \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu} \end{array}\right. \qquad (39)$$

ce qui s'écrit : $\boxed{E\varepsilon_{ij} = (1+\nu)\,\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\,\sigma_{kk}}$ Ce sont les relations de Young.

Remarque :

L'énergie de déformation du cristal doit être positive, sans quoi le cristal serait instable.

Autrement dit : (37) doit être $>$ 0.

Dans le cas isotrope, il faut et il suffit que $\mu > 0$ et $3\lambda + 2\mu > 0$

ce qui entraine $E > 0$ et $-1 < \nu < \frac{1}{2}$

En fait, on ne connaît pas de corps* pour lesquels $\nu < 0$ (qui enfleraient en s'allongeant). Donc $\nu > 0$ et $< \frac{1}{2}$. En général ν est de l'ordre de 0,3.

Expressions de E et ν en fonction de λ et μ

Pour exprimer en fonction de λ et μ, étudions le cas de la traction (ou compression) simple :

$$\sigma_1 \neq 0$$
$$\sigma_2 = \sigma_3 = \ldots\ldots\ldots = 0$$

*- sauf la pyrite (FeS_2)

Dans ces conditions, compte tenu de la forme de la matrice des compliances ; on a :

$$\varepsilon_1 = s_{11}\sigma_1$$
$$\varepsilon_2 = s_{12}\sigma_1 \qquad (41)$$
$$\varepsilon_3 = s_{12}\sigma_1 = \varepsilon_2$$

Les équations (38) s'écrivent alors :

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_n + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}$$
$$\sigma_{22} = 0 = \lambda\varepsilon_{11} + (2\mu + \lambda)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} \qquad (42)$$

soit en divisant par ε_{11} :

$$E = (2\mu+\lambda) - 2\lambda\nu = 2\mu + \lambda(1-2\nu)$$
$$0 = \lambda - (2\mu + \lambda)\nu - \lambda\nu = \lambda(1-2\nu) - 2\mu\nu$$

soit en combinant ces expressions :

$$\boxed{\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}} \qquad (43) \qquad E = 2\mu(1+\nu)$$

$$2\nu = \frac{E - 2\mu}{\mu} \qquad \text{d'où} \qquad E = 2\mu + \lambda - \lambda\left(\frac{E-2\mu}{\mu}\right)$$

$$\text{soit} \quad \boxed{E = \frac{(2\mu + 3\lambda)\mu}{\mu + \lambda}} \qquad (44)$$

$$\text{ou} \quad \boxed{\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

Il vient également :

$$\boxed{\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}} \qquad (45)$$

On définit également la compressibilité : c'est à dire la diminution relative du volume d'un cristal soumis à une pression hydrostatique de valeur unité :

(46) $$\chi = -\frac{1}{p}\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{p}\,\varepsilon_{ii}$$ avec $K = \frac{1}{\chi}$ = module de compression

En pression hydrostatique, le tenseur s'écrit $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$

D'où $\varepsilon_{ij} = -p\, s_{ijkl}\,\delta_{kl} = -p\, s_{ijkk}$

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{ii} = -p\, s_{iikk}$$ d'où $$\chi = s_{iikk} = \text{invariant}$$ (47)

(ε_{ii} : invariant)

En notation matricielle :

$$\chi = s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2\,(s_{12} + s_{23} + s_{31})$$

Dans le cas du corps isotrope : $s_{11} = s_{22} = s_{33} = \frac{1}{E}$ $\quad s_{12} = s_{23} = s_{31} = -\frac{\nu}{E}$

d'où $\chi = \frac{3}{E}\,(1-2\nu)$ $$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$ (48)

et à l'aide des équations (44) et (45)

$$\chi = \frac{3}{2\mu + 3\lambda} \quad \text{ou} \quad K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$$ (49)

Remarque : Matériaux polycristallins

Les solides polycristallins peuvent être considérés comme isotropes si les cristallites sont suffisamment petites (puisque l'on considère des déformations dans des régions grandes par rapport aux cristallites).

Dans ce cas, le polycristal est caractérisé par deux modules d'élasticité.

On pourrait penser que ces modules peuvent être calculés à partir des modules d'élasticité des diverses cristallites par une simple moyenne. Mais en fait il n'en est rien. En effet, si la déformation du polycristal résulte de celle des cristallites dont il est formé, on doit résoudre les équations d'équilibre pour toutes les cristallites en tenant-compte des conditions aux limites sur les surfaces de séparation (joints de grains).

On constate donc que le lien entre les propriétés élastiques du cristal dans son ensemble et celles des cristallites dépend de la forme des cristallites et de leur orientation relative.

On peut cependant, en première approximation, évaluer les modules d'un polycristal isotrope en fonction des modules monocristallins si les propriétés élastiques du monocristal sont faiblement anisotropes ($A \neq 1$).

On estime, en première approximation, que les modules du polycristal sont simplement égaux à la partie isotrope des modules élastiques du monocristal.

Remarque :

On peut retrouver simplement les relations contraintes-déformations dans le cas des solides isotropes.

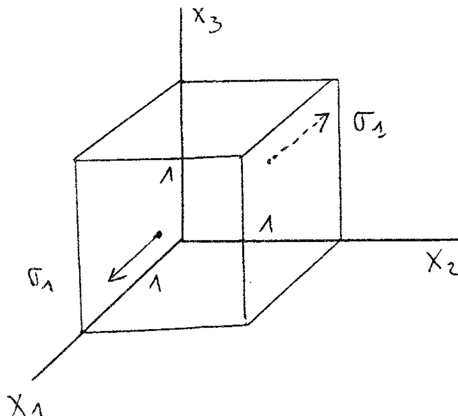
Considérons tout d'abord l'expression de la loi de Hooke généralisée par rapport aux axes principaux.

On fait les deux hypothèses suivantes :

- 1 - les directions principales des déformations sont confondues avec celles des contraintes

- 2 - on peut appliquer le principe de superposition.

Considérons le cas d'une contrainte uniaxiale (essai de traction)



On a $\boxed{\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}}$

E = module d'élasticité longitudinale

$\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ par isotropie

$$\nu = \frac{-\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{-\varepsilon_3}{\varepsilon_1}$$

soit $\boxed{\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1 = \frac{-\nu\sigma_1}{E}}$

Si l'état de contrainte est quelconque, on applique le principe de superposition.

	σ_1	σ_2	σ_3
ε_1	$\frac{\sigma_1}{E}$	$-\frac{\nu\sigma_2}{E}$	$-\frac{\nu\sigma_3}{E}$
ε_2	$-\frac{\nu\sigma_1}{E}$	$\frac{\sigma_2}{E}$	$-\frac{\nu\sigma_3}{E}$
ε_3	$-\frac{\nu\sigma_1}{E}$	$-\frac{\nu\sigma_2}{E}$	$\frac{\sigma_3}{E}$

soit

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)\right]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right]$$

ou

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) \\ \varepsilon_2 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) \\ \varepsilon_3 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_3 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) \end{cases}$$

soit

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E}\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} - \frac{\nu}{E}\,tr[\sigma]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}[\sigma] - \frac{\nu}{E}(tr[\sigma])\,[1]}$$

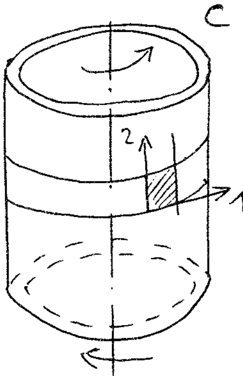
Par rapport à des axes quelconques, on applique la loi de transformation des composantes d'un tenseur et on a :

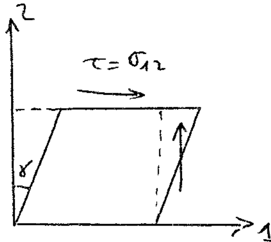
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E}\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \frac{\nu}{E}\,tr[\sigma]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}}$$ (39) Ce sont les relations de Young.

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu\left(\sigma_{22} + \sigma_{33}\right)\right] \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \nu\left(\sigma_{11} + \sigma_{33}\right)\right] \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \nu\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right)\right] \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu} \\ \varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2\mu} \\ \varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2\mu} \end{array}\right.$$

Lors de l'essai de torsion





$$\gamma = 2\varepsilon_{12}$$

$$\tau = G\gamma = \mu\gamma$$

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\tau}{\mu} = \frac{\tau_{12}}{G}$$

soit : $\frac{1+\nu}{E} = \frac{1}{2\mu}$

$$\boxed{\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

A partir des expressions précédentes, on peut exprimer σ_{ij} en fonction des ε_{ij}.

On a en effet : $\theta = \frac{1}{E}(1-2\nu)(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$

soit $E\,\varepsilon_{11} = \sigma_{11} - \nu\left(\frac{E\theta}{1-2\nu} - \sigma_{11}\right)$

ou $\sigma_{11} = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\theta + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{11}$

en posant $\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$

$$2\mu = \frac{E}{1+\nu}$$

On obtient les <u>formules de Lamé</u> :

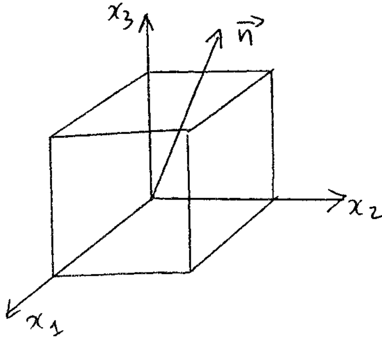
$$\sigma_{11} = \lambda\theta + 2\mu\,\varepsilon_{11}$$
$$\sigma_{22} = \lambda\theta + 2\mu\,\varepsilon_{22}$$
$$\sigma_{33} = \lambda\theta + 2\mu\,\varepsilon_{33} \qquad (38)$$
$$\sigma_{12} = 2\mu\,\varepsilon_{12}$$
$$\sigma_{23} = 2\mu\,\varepsilon_{23}$$
$$\sigma_{13} = 2\mu\,\varepsilon_{13}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}\,\varepsilon_{kk} + 2\mu\,\varepsilon_{ij}$$

Exercice V.1.

Déterminer le lien entre le module de traction d'un cristal cubique et la direction.

Prenons comme coordonnées les trois axes d'ordre 4 du cristal cubique.
Supposons que l'axe de de la barre taillée dans le cristal soit dirigé suivant



le vecteur unitaire $\bar{n}$. Le tenseur des contraintes dans la barre est : σ_{ij} : il satisfait aux conditions suivantes : multiplié par n_i (voir chapitre III, relation 20) il doit donner la force de traction suivante $\bar{n}$: multiplié par un vecteur $\perp$ à $\bar{n}$, il doit s'annuler (condition sur la surface latérale de la barre).

Un tel tenseur s'écrit :

$$\sigma_{ij} = p\, n_i n_j$$

p = force de traction agissant sur l'unité de surface de la base.
En effet, suivant une direction parallèle à $\bar{n}$, on a :

$$T_i = \sigma_{ij} n_j = p n_i n_g n_j \quad \text{mais} \quad n_j^2 = 1 \quad \text{donc}$$

$$T_i = p\, n_i$$

Pour une direction $\perp \vec{n}$: $T_i = \sigma_{ij}\, n'_j = p n_i\, n_j\, n'_j = 0$ car $n_j\, n'_j = 0$

Calculons l'énergie libre d'après la relation (29) et en tenant compte de la matrice c_{ij} donnée par (31) :

$$F = \frac{1}{2}\; c_{ij}\,\varepsilon_i\,\varepsilon_j$$

$$= \frac{1}{2}\, c_{11}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2) + c_{12}(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_3)+\frac{1}{4}c_{44}\;(\varepsilon_4^2+\varepsilon_5^2+\varepsilon_6^2)$$

En notation semi tensorielle (voir relation (33)).

$$F = \frac{1}{2} c_{11} (\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{33}^2) + c_{12}(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}+\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}) + 2c_{44}(\varepsilon_{23}^2+\varepsilon_{31}^2+\varepsilon_{12}^2)$$

Nous pouvons maintenant calculer σ_{ij} en appliquant la relation thermodynamique (22) :

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_T^{*}$$

d'où $\sigma_{11} = c_{11}\ _{11} + c_{12} (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$

$\sigma_{22} = c_{11}\ _{22} + c_{12} (\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11})$

$\sigma_{33} = c_{11}\ _{33} + c_{12} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$

$\sigma_{23} = 2\ c_{44}\varepsilon_{23}$ $\qquad 2\ _{23} = \ 4$ $\qquad$ loi de Hooke pour un

$\sigma_{31} = 2c_{44}\varepsilon_{31}$ $\qquad$ cristal cubique

$\sigma_{12} = 2c_{44}\varepsilon_{12}$

Or $\sigma_{ij} = p\ n_i n_j$

$\sigma_{11} = pn_1^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad _{23} = p\ n_2 n_3$

Soit en comparant :

$$c_{11}\ \varepsilon_{11} + c_{12}\ (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = p\ n_1^2$$
$$c_{11}\ \varepsilon_{22} + c_{12}\ (\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}) = p\ n_2^2$$
$$c_{11}\ \varepsilon_{33} + c_{12}\ (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = p\ n_3^2$$

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad \frac{p}{c_{11} + 2c_{12}}$$

-En tirant ε_{11} de la 1ère équation :

$$\varepsilon_{11} = p\ \frac{n_1^2\ (c_{11}+2c_{12}) - c_{12}}{(c_{11} + 2c_{12})\ (c_{11}-c_{12})}$$

*Remarque : on pourrait les calculer directement d'après les formules : $\sigma_{ij} = c_{ijkl}\ \varepsilon_{kl}$. Quand on dérive l'énergie libre / ε_{ij}, si $i \neq j$, les dérivées/ε_{ij} donnent deux fois les valeurs des composantes correspondantes de σ_{ij}. En effet $\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}$ signifie que $dF = \sigma_{ij}\ d\varepsilon_{ij}$. Or les termes avec $d\varepsilon_{ij}$, $i \neq j$ figurent deux fois dans la somme $\sigma_{ij}\ d\varepsilon_{ij}$, ε_{ij} étant un tenseur symétrique.

de même pour ε_{22} et ε_{33}

et $$\varepsilon_{12} = \frac{p\, n_1\, n_2}{2C_{44}}$$ idem pour ε_{23} et ε_{31}

L'allongement ε dans la direction $\overline{n}$ est donné par :

$$\varepsilon = u_i \cdot n_i \Big| = \varepsilon_{ij}\; n_i n_j$$ (voir chapitre III)

↓

vecteur déplacement

Le module d'YOUNG par définition est égal à $E = \frac{p}{\varepsilon}$

soit : $\varepsilon = \varepsilon_{11}n_1^{\,2}+\varepsilon_{22}n_2^{\,2}+\varepsilon_{33}n_3^{\,2} + \varepsilon_{12}n_1n_2 + 2\varepsilon_{23}n_2n_3 + 2\varepsilon_{31}n_1n_3$

$$= \frac{p(c_{11}+2c_{12})}{(C_{11}+2c_{12})\,(c_{11}-c_{12})}\left(n_1^{\,4}+n_2^{\,4}+n_3^{\,4}\right) - \frac{p\, c_{12}}{(c_{11}+2c_{12})\,(c_{11}-c_{12})}$$

$$+ \frac{p}{c_{44}}\,(n_1^{\,2}n_2^{\,2} + n_2^{\,2}n_3^{\,2} + n_1^{\,2}n_3^{\,2})$$

or $1 = (n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2})^2 = n_1^{\,4}+n_2^{\,4}+n_3^{\,4}+2n_1^{\,2}n_2^{\,2}+2n_2^{\,2}n_3^{\,2}+2n_1^{\,2}n_3^{\,2}$

soit : $$\boxed{\varepsilon = \frac{p(c_{11}+c_{12})}{(c_{11}+2c_{12})(c_{11}-c_{12})} + p\left(\frac{1}{c_{44}} - \frac{2}{c_{11}-c_{12}}\right)\left(n_1^{\,2}n_2^{\,2}+n_2^{\,2}n_3^{\,2}+n_3^{\,2}n_1^{\,2}\right)}$$

soit : $$\boxed{\frac{1}{E} = \frac{c_{11}+c_{12}}{(c_{11}+2c_{12})(c_{11}-c_{12})} + \left(\frac{1}{c_{44}} - \frac{2}{c_{11}-c_{12}}\right)\left(n_1^{\,2}n_2^{\,2}+n_2^{\,2}n_3^{\,2}+n_3^{\,2}n_1^{\,2}\right)}$$

E a des extrema suivant les arêtes (axes de coordonnées) et suivant les grandes diagonales du cube : arêtes : $n_1 n_2^2 + \ldots\ldots = 0$

Remarque : Pour un cristal isotrope, on a vu que :

$$c_{44} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \qquad \text{relation (35)}$$

$$\frac{1}{c_{44}} = \frac{2}{c_{11} - c_{12}} \qquad \frac{1}{E} = \frac{c_{11}+c_{12}}{(c_{11}+2c_{12})(c_{11}-c_{12})}$$: indépendant de l'orientation

$$\left.\begin{array}{l} c_{11} = \lambda + 2 \\ c_{12} = \lambda \\ c_{44} = \mu \end{array}\right] \Longrightarrow$$ retrouve relation (44)

$$\frac{1}{E} = \frac{2(\lambda+\mu)}{(3\lambda+2\mu)2\mu} \qquad E = \frac{(2\mu+3\lambda)\mu}{\mu+\lambda}$$

CHAPITRE VI

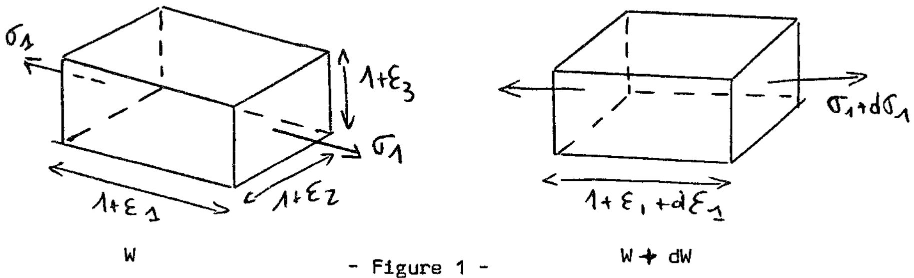
- ENERGIE DE DEFORMATION ET CRITERES DE RESISTANCE

VI.1. - ENERGIE DE DEFORMATION (par unité de volume)

VI.1.1. - Forme différentielle

Cas d'une contrainte uniaxiale :

Considérons un cube unitaire soumis à une contrainte σ_1 (figure 1)

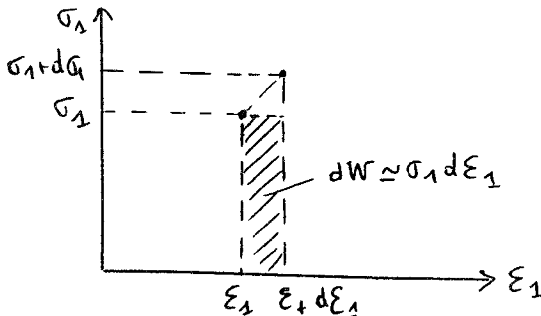


- Figure 1 -

La variation de l'énergie élastique emmagasinée par unité de volume dW est égale à :

$$dW \approx \sigma_1 \, d\varepsilon_1$$

si on néglige les infiniments p etits d'ordre supérieur (figure 2)



- Figure 2 -

Cas d'une contrainte quelconque (axes principaux)

Par superposition, on peut écrire :

$$\boxed{dW = \sigma_1 \, d\, \varepsilon_1 + \sigma_2 \, d\, \varepsilon_2 + \sigma_3 \, d\, \varepsilon_3} \qquad (1)$$

mais dans $d\varepsilon_1$ il y a l'effet de $d\sigma_2$ et $d\sigma_3$ et de même pour $d\varepsilon_2$ et $d\varepsilon_3$.

Par rapport aux axes principaux :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \qquad [d\varepsilon] = \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & d\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & d\varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Soit $dW = tr\left([\sigma] \; [d\varepsilon] \right) = \text{Invariant}$

Dans un système d'axes quelconques :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad [d\varepsilon] = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} & d\varepsilon_{12} & d\varepsilon_{13} \\ d\varepsilon_{12} & d\varepsilon_{22} & d\varepsilon_{23} \\ d\varepsilon_{13} & d\varepsilon_{23} & d\varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$tr([\sigma] \; [d\varepsilon]) = tr \begin{pmatrix} \sigma_{11}d\varepsilon_{11} + \sigma_{12}d\varepsilon_{12} + \sigma_{13}d\varepsilon_{13} & & \\ - & \sigma_{12}d\varepsilon_{12} + \sigma_{22}d\varepsilon_{22} + \sigma_{23}d\varepsilon_{23} & \\ - & - & \sigma_{13}d\varepsilon_{13} + \sigma_{23}d\varepsilon_{23} + \sigma_{33}\, d\varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

soit :

$$\boxed{dW = \sigma_{11}d\varepsilon_{11} + \sigma_{22}d\varepsilon_{22} + \sigma_{33}d\varepsilon_{33} + 2\sigma_{12}d\varepsilon_{12} + 2\sigma_{23}d\varepsilon_{23} + 2\sigma_{13}d\varepsilon_{13}} \qquad (2)$$

On retrouve naturellement la même relation que celle établie au chapitre V (relation V.17).

VI.1.2. - Forme intégrée

Dans le cas d'un matériau isotrope obeissant à la loi de Hooke (cf.§ V.7 relation V.39), on peut écrire :

$$d\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left[d\sigma_{11} - \nu(d\sigma_{22} + d\sigma_{33})\right] \qquad d(2\varepsilon_{12}) = \frac{d\sigma_{12}}{\mu} = \frac{2d\sigma_{12}(1+\nu)}{E}$$

.

.

$$\text{soit } dW = \frac{1}{E}\left[\sigma_{11}d\sigma_{11} + \sigma_{22}d\sigma_{22} + \sigma_{33}d\sigma_{33}\right] - \frac{\nu}{E}\left[\overbrace{\sigma_{11}d\sigma_{22} + \sigma_{22}d\sigma_{11}}^{d(\sigma_{11}\sigma_{22})} + \sigma_{11}d\sigma_{33} + \sigma_{33}d\sigma_{11} + \sigma_{22}d\sigma_{33} + \sigma_{33}d\sigma_{22}\right] + \frac{1}{\mu}\left[\sigma_{12}d\sigma_{12} + \sigma_{13}d\sigma_{13} + \sigma_{23}d\sigma_{23}\right]$$

soit l'énergie élastique emmagasinée par unité de volume

$$\boxed{W = \frac{1}{2E}\left[\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2\right] - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}) + \frac{1}{2\mu}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} \quad (3)$$

la constante d'intégration étant nulle

Remarque : l'énergie de déformation a été calculée en supposant que les les contraintes croissent simultanément et progressivement.

VI.1.3. - Energie de changement de volume et de changement de forme

Le changement de volume lors de la déformation est donné par θ (cf chapitres IV. et V)

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

Nous avons vu § III.2.6. que le tenseur σ_{ij} peut se décomposer en deux parties (relation III.16) : un état de contrainte hydrostatique superposé à un état de contrainte donnant une variation de forme sans variation de volume.

$$[\sigma] = \frac{\text{tr}\,[\sigma]}{3}\,[1] + \left[\sigma^d\right]$$

L'état de contrainte hydrostatique donne l'énergie de changement de volume (ou de dilatation) :

$$W_s = \frac{(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})^2}{6E}\,(1-2\nu)$$

$$\boxed{W_s = \frac{1-2\nu}{6E}\,(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})^2} \qquad (4)$$

D'après le principe de superposition, l'énergie de changement de forme est égale à :

$$W_d = W - W_s$$

(d'après le principe de la conservation d'énergie, le travail effectué est indépendant de l'ordre dans lequel on applique les forces et ne dépend que de l'état final).

$$W_d = (\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2+\sigma_{33}^2)\left(\frac{1}{2E}-\frac{1-2\nu}{6E}\right)+(\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}\sigma_{33}+\sigma_{33}\sigma_{11})\left(-\frac{\nu}{E}-\frac{1-2\nu}{3E}\right)$$

$$+\frac{1+\nu}{E}\,(\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2)$$

$$W_d = \frac{1+\nu}{6E}\,(2\sigma_{11}^2+2\sigma_{22}^2+2\sigma_{33}^2) - \frac{1+\nu}{3E}\,(\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}\sigma_{33}+\sigma_{33}\sigma_{11})$$

$$+\frac{1+\nu}{E}\,(\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2)$$

soit $$\boxed{W_d = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6\,(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{13}^2)\right]} \qquad (5)$$

Remarque 1 : On peut exprimer W en fonction des invariants de la contrainte, W ne dépendant pas du système d'axes choisis.

$$W = W_s + W_d = \frac{1-2\nu}{6E}\,I_1^2 - \frac{(1+\nu)}{E}\,J_2$$

$$\left|\begin{array}{l} W_s = \dfrac{1-2\nu}{6E}\; I_1^2 \\[2ex] W_d = -\dfrac{(1+\nu)}{E}\; J_2 \end{array}\right. \qquad (6)$$

$$I_1 = tr.[\sigma] = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = tr\,[\sigma^s]$$

J_2 = invariant quatratique de σ_{ij}^d (df §III.2.6)

$$= -\frac{1}{6}\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6\,(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)\right]$$

Remarque 2 : Par rapport aux axes principaux, les expressions de W, W_s et W_d sont les suivantes :

$$W_s = \frac{1-2\nu}{6E}\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$W_d = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

$$W = W_s + W_d$$

Remarque 3 : Liaison avec la contrainte octaédrique (cf § III.2.7)

$$W_s = \frac{1-2\nu}{6E}\, 9\, \sigma_{oct}^2 \qquad \sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3}$$

$$W_d = \frac{1+\nu}{6E}\, 9\, \tau_{oct}^2 \qquad \tau_{oct}^2 = -\frac{2}{3}\, J_2$$

soit $$\boxed{W_d = \frac{3}{2}\,\frac{1+\nu}{E}\,\tau_{oct}^2 = \frac{3}{4\mu}\,\tau_{oct}^2} \qquad (7)$$

VI.2. - CRITERES DE RESISTANCE OU DE PLASTICITE

VI.2.1. - Position du problème

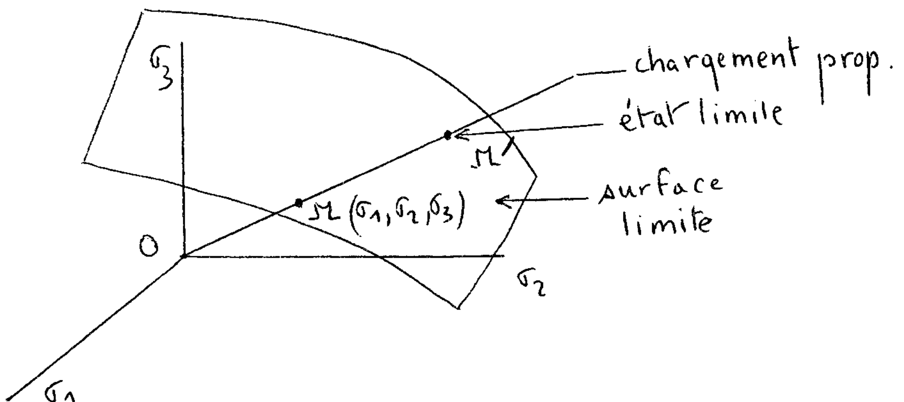
Dans le cas simple d'une sollicitation uniaxiale (traction par exemple) (cf chap.I), les phénomènes sont caractérisés par :

- un seuil d'apparition de la plasticité : c'est la limite élastique σ_E au delà de laquelle apparaît des déformations permanentes irréversibles,
- dans le domaine plastique, la limite élastique est accrue quand la déformation plastique croit : c'est le phénomène d'écrouissage; la contrainte continue à croître mais moins rapidement que dans le domaine élastique
- si les phénomènes d'écrouissage sont négligeables, la contrainte reste alors constante et égale au seuil de plasticité,
- souvent les phénomènes précédents sont compliqués par l'existence des phénomènes de viscosité et d'une dissymétrie tension-compression (effet Bauschinger).

Dans le cas d'une sollicitaiton quelconque, il faut chercher quelle condition doit remplir le tenseur des contraintes pour qu'apparaisse la déformation plastique. Cette condition de plasticité est une propriété caractéristique du solide et est, par conséquent, si le corps est isotrope indépendante du système d'axes choisi : elle ne contiendra donc que des invariants du tenseur des contraintes. De plus, elle doit se réduire à $\sigma = \sigma_E$ dans le cas d'une sollicitation uniaxiale. La forme la plus générale de cette condition s'écrira :

$$f\ (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$$

Représentons un état de contrainte par un point M de coordonnées $\sigma_1;\sigma_2$ et σ_3(fig.2)



Pour chaque point M, en appliquant un chargement proportionnel, on définit un point M' représentant l'état limite pour lequel apparait le premier dommage (dépassement de la limite élastique ou rupture).
L'ensemble des points M' forme la surface limite. Les contraintes jouant le même rôle, la trissectrice est un axe de symétrie ternaire pour la surface limite.
Pour définir une telle surface, on fait des hypothèses : ce sont les critères de résistance (critère découlement ou de plasticité : limite élastique ou critère de rupture).
Le coefficient de sécurité de l'état M se définit par le rapport :

$$\alpha = \frac{OM'}{OM} \quad (8)$$

VI.2.2. - Matériaux ductiles - Matériaux fragiles

L'expérience montre que les solides peuvent être classés en deux catégories distinctes :

- Les matériaux ductiles : (tels que les métaux);

ces matériaux peuvent subir une déformation plastique très importante entre la limite élastique et la rupture. Ces déformations permanentes présentent toujours l'aspect de glissement orientés suivant des directions faisant sensiblement 45° avec les contraintes principales.

- Les matériaux fragiles : (tel que le verre par exemple);

la rupture des matériaux fragiles a lieu presque immédiatement après la limite élastique, sans déformation plastique notable. Dans le cas de ces matériaux, les phénomènes semblent liés à la plus grande tension principale, la rupture étant perpendiculaire à cette dernière.

VI.2.3. - Critère de Rankine

- a - Enoncé : Critère de la contrainte principale maximale

La surface limite est atteinte lorsque la contrinte principale maximale (en module) prend une valeur limite k ou k' déterminée respectivement dans un essai de traction ou dans un essai de compassion.

- b - Formulation

$$\text{si } |\sigma_1| \text{ est maxi} \quad \begin{cases} \sigma_1 = k & \text{si } \sigma_1 > 0 \\ \sigma_1 = -k' & \text{si } \sigma_1 < 0 \end{cases}$$

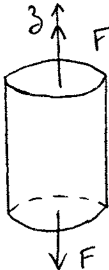
$$|\sigma_2| \text{ est maxi} \quad \begin{cases} \sigma_2 = k & \text{si } \sigma_2 > 0 \\ \sigma_2 = -k' & \text{si } \sigma_2 < 0 \end{cases} \qquad (9)$$

$$|\sigma_3| \text{ est maxi} \quad \begin{cases} \sigma_3 = k & \text{si } \sigma_3 > 0 \\ \sigma_3 = -k' & \text{si } {}_3 < 0 \end{cases}$$

La surface limite est donc un cube de côté (k+k')

- c - Valeurs de k et k'

. Essai de traction



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 = \frac{F}{S} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = \frac{F}{S} \end{cases}$$

Le premier dommage a lieu pour σ_E

Exp. $\sigma_3 = \sigma_E$

critère $\sigma_3 = k$

$$\text{donc} \quad \boxed{k = \sigma_E} \qquad (10)$$

. Essai de compression

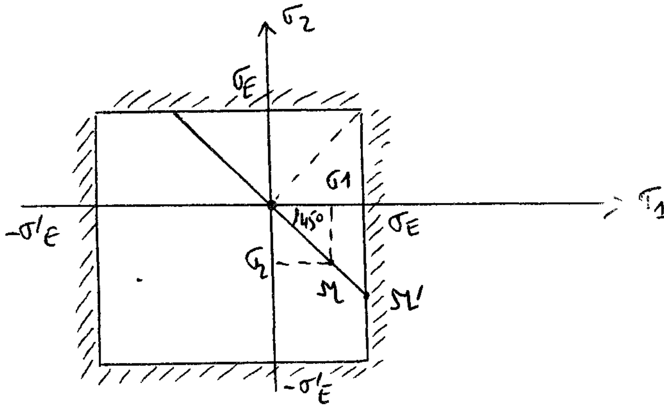
$$\begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -\sigma'_E = -\frac{F}{S} \end{cases}$$

expérience $\sigma_3 = -\sigma'_E$

critère $\sigma_3 = -k'$

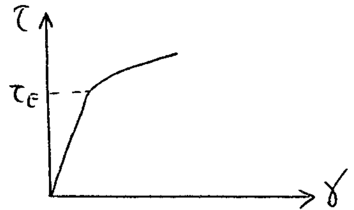
$$\boxed{k' = \sigma'_E}$$

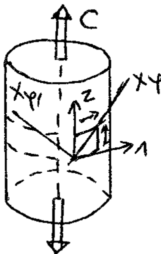
- d - Image du critère pour $\sigma_3 = 0$ (cas de l'extensométrie)



- Figure 3 -

- e - Conséquences : cas de la torsion (figure 4)





$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$$

- Figure 4 -

A la limite élastique $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_E$

Or le critère donne $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_E$ (point M')

d'où la relation $\boxed{\sigma_E = \tau_E}$ (11) imposée par le critère.

Cette relation n'est vérifiée que pour les matériaux fragiles.

- Remarque - Ce critère tient compte de la dissymétrie du matériau en traction et compression.

VI.2.4. - Critère de Tresca-Coulomb

- a - Enoncé : Critère de la contrainte tangentielle maximale

On atteint la surface limite lorsque la contrainte tangentielle maximale prend une valeur limite déterminée lors de l'essai de traction.

- b - Formulation

Si σ_1, σ_2, σ_3 sont les trois contraintes pincipales, la représentation de Mohr montre que le cisaillement maximal est égal à l'une des trois valeurs (cf. § III.2.5.).

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \, , \qquad \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \, , \qquad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \pm k \\[2ex] \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm k \\[2ex] \dfrac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \pm k \end{array} \right. \qquad (12)$$

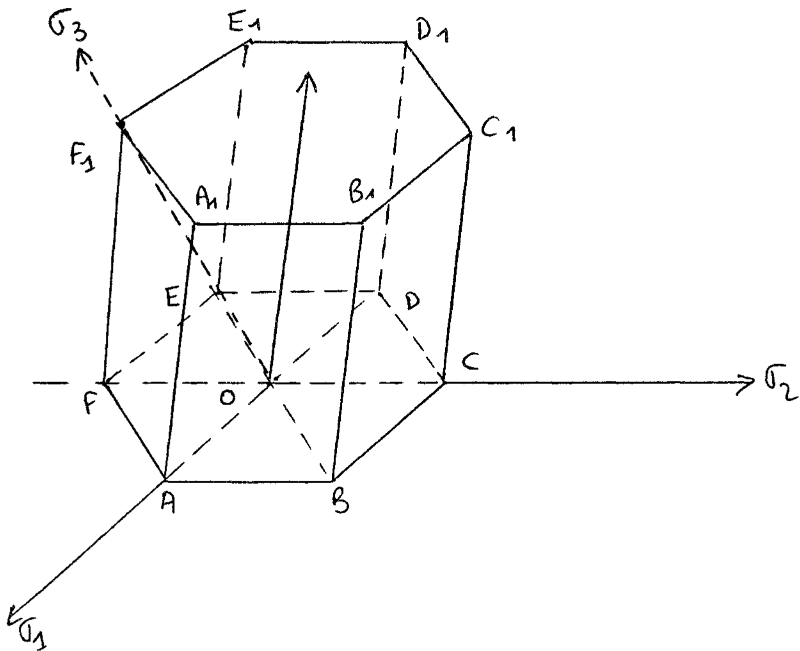
Il est possible de représenter géométriquement le critère de Tresca-Coulomb en cherchant le lieu de tous les points satisfaisant à la relation $\tau_{max} = \pm k$ dans le système d'axes σ_1, σ_2, σ_3.

La surface limite est un cylindre à base hexagonale et de génératrice parallèle à la trissectrice.

En effet, dans le cas où $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, on a

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \pm k$$

Cette équation représente deux plans parallèles AA_1 BB_1 et DD_1 EE_1 (figure 5).



- Figure 5 -

De même si $\sigma_2 < \sigma_1 < \sigma_3$, l'équation $\tau_{max} = \pm k$ représente deux plans parallèles $BB_1 CC_1$ et EE_1FF_1 donnés par $\sigma_3 - \sigma_2 = \pm 2k$ et si $\sigma_1 < \sigma_3 < \sigma_2$, on a les plans $CC_1 DD_1$ et AA_1FF_1.

- c - Essai de traction

Suivant l'axe 3 par exemple : $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \frac{F}{S} = \sigma_E$

$$\text{Critère} \quad \begin{cases} -\dfrac{\sigma_3}{2} = -k \\ \dfrac{\sigma_3}{2} = k \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{k = \frac{\sigma_E}{2}} \qquad (13)$$

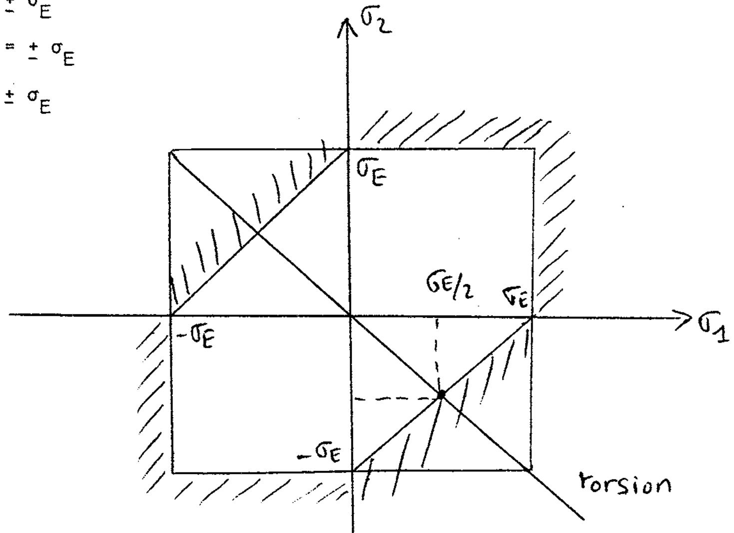
$$\text{d'où} \quad \boxed{\begin{array}{l} \sigma_1 - \sigma_3 = \pm \sigma_E \\ \sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_E \\ \sigma_2 - \sigma_3 = \pm \sigma_E \end{array}}$$

- d - Image pour $\sigma_3 = 0$ (fig. 6)

$\sigma_1 = \pm \sigma_E$

$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_E$

$\sigma_2 = \pm \sigma_E$



- Figure 6 -

Le matériau est symétrique en traction ou compression.

- e - Conséquence : essai de torsion

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_E \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\tau_E = \frac{\sigma_E}{2}} \qquad (14)$$

Cette relation convient assez bien pour les matériaux ductiles.

VI.2.5. - Critère de Von Misès

- a - Enoncé : Critère de la contrainte tangentielle octaédrique ou de l'énergie de changement de forme.

On atteint la surface limite lorsque la contrainte tangentielle octaédrique prend une valeur limite déterminée dans l'essai de traction.

- b - Formulation

$$\tau_{oct}^{2} = \frac{1}{9} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = K \qquad (15)$$

Le lieu géométrique de la surface limite est un cylindre à base circulaire de génératrice parallèle à la trissectrice.

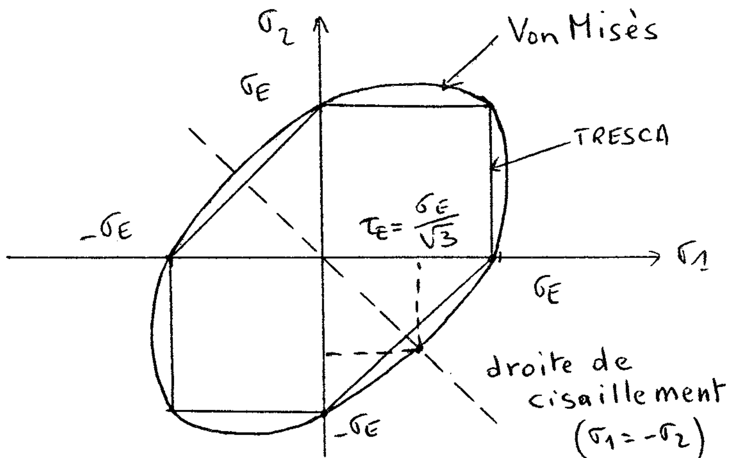
- c - Essai de traction

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = \sigma_E \end{cases} \qquad \tau_{oct}^{2} = \frac{1}{9} 2\sigma_E^2 = \frac{2}{9} \sigma_E^2 = K$$

d'où le critère de Von Misès :

$$\boxed{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_E^2} \qquad (15)$$

- d - Image du critère dans le plan $\sigma_1 \sigma_2$ ($\sigma_3 = 0$) (figure 7)



- Figure 7 -

On a $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 2\sigma_E^2$

soit $$\boxed{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_E^2} \qquad (16)$$

Le comportement du matériau est symétrique.
L'intersection de la surface limite par le plan principal σ_1 σ_2 est une ellipse. Cette ellipse est circonscrite au polygone représentent l'intersection par le plan principal de la surface limite du critère de Tresca-Coulomb (cf figure 6)

- e - Conséquence : Essai de torsion

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_E$$

Le critère s'écrit $\tau_E^2 + \tau_E^2 + \tau_E^2 = 3\tau_E^2 = \sigma_E^2$

d'où $$\boxed{\tau_E = \frac{\sigma_E}{\sqrt{3}}} \qquad (17)$$

soit $\tau_E = 0,577\sigma_E$
au lieu de $\tau_E = 0,5\ \sigma_E$ pour le critère de Tresca.

VII.2.6. - Critère de Stassi

- a - Enoncé : On atteint la surface limite lorsque la contrainte tangentielle octaédrique prend une certaine valeur fonction de la contrainte normale octaédrique.

- b - Formulatioh

$$\tau_{oct}^2 = a + b\sigma_{oct}$$

$$\frac{1}{9}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] = a + b\,\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \qquad (18)$$

Il faut donc déterminer 2 constantes : on le fait à l'aide des essais de traction et de compression.

- c - Calcul de a et b

Traction : $\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = \sigma_E \end{cases}$ soit $\frac{2}{9}\sigma_E^2 = a + b\frac{\sigma_E}{3}$

Compression :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -\sigma'_E \end{cases} \qquad \frac{2}{9}\sigma'^2_E = a - b\frac{\sigma'_E}{3}$$

d'où $\frac{2}{9}\left(\sigma'^2_E - \sigma^2_E\right) = -\frac{b}{3}\left(\sigma'_E + \sigma_E\right)$

$$b = -\frac{2}{3}\left(\sigma'_E - \sigma_E\right)$$

$$a = \frac{2}{3}\sigma'^2_E - \frac{2}{9}\left(\sigma'^2_E - \sigma'_E\sigma_E\right) = \frac{2}{9}\sigma'_E\sigma_E$$

d'où le critère de Stassi :

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2 + 2\,(\sigma'_E - \sigma_E)\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 2\sigma_E\sigma'_E \qquad (19)$$

C'est l'équation d'un paraboloïde.

Remarque : si $\sigma_E = \sigma'_E$, on retrouve le critère de Von Misès.
Le critère de Stassi convient pour les matériaux ductiles et les matériaux fragiles.

- d - Image du critère dans le plan $\sigma_1\ \sigma_2\ (\sigma_3 = 0)$

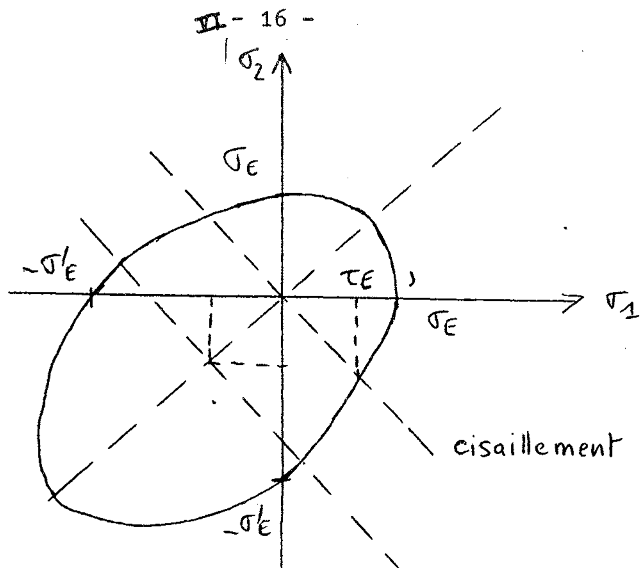
$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2 + 2\,(\sigma'_E - \sigma_E)\,(\sigma_1 + \sigma_2) = 2\sigma_E\sigma'_E$$

$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 + (\sigma'_E - \sigma_E)\,(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_E\sigma'_E$ équation d'une ellipse (fig. 8)

Les coordonnées du centre :

$$f'(\sigma_1) = 0 \qquad 2\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma'_E - \sigma_E = 0$$

$$f'(\sigma_2) = 0 \qquad 2\sigma_2 - \sigma_1 + \sigma'_E - \sigma_E = 0$$



- Figure 8 -

soit les coordonnées du centre : $\begin{cases} \sigma_1 = -(\sigma'_E - \sigma_E) \\ \sigma_2 = -(\sigma'_E - \sigma_E) \end{cases}$

Les axes de l'ellipse sont parallèles aux bissectrices ; ils sont en effet donnés par $tg^2\alpha = 1$, soit $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$

- e - Essai de torsion :

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_E \quad \text{d'où} \quad 3\tau_E^2 = \sigma_E \sigma'_E$$

soit $$\boxed{\tau_E = \sqrt{\frac{\sigma_E \sigma'_E}{3}}} \qquad (20)$$

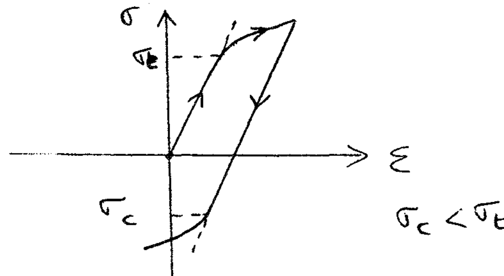
VI.2.7. - Courbes et surfaces intrinsèques

Les critères de Tresca-Coulomb et de Von Misès reposent sur trois hypothèses :

- le corps est isotrope
- la pression hydrostatique est sans influence
- il y a symétrie de l'effet par rapport au sens de la contrainte;

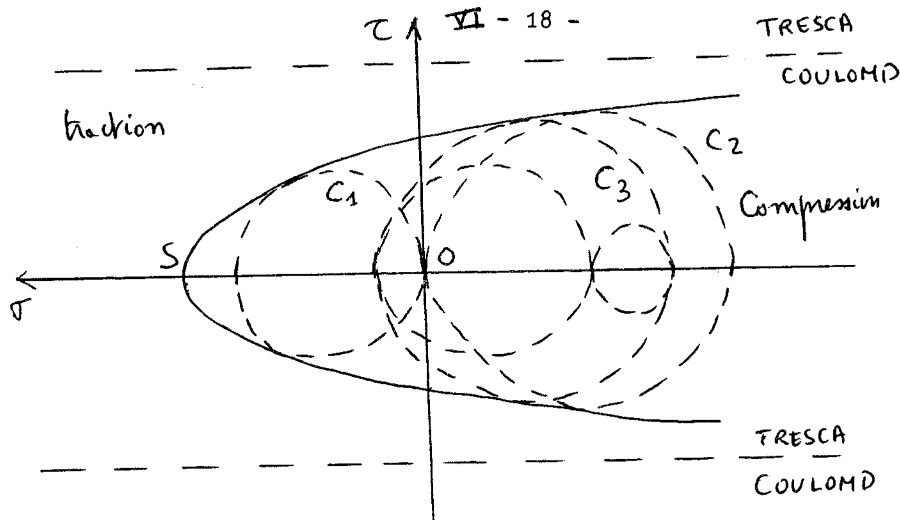
Ces deux critères conviennent assez bien pour les matériaux ductiles. Mais en fait les hypothèsesne sont pas rigoureusement correctes :

- les solides cristallins sont anisotropes
- la pression hydrostatique joue un rôle en particulier pour les valeurs élevées
- il y a l'effet Bauschinger : le comportement à la compression est modifié par l'essai de traction (figure 9).



- Figure 9 -

En 1880, MOHR tenait déjà compte de la pression hydrostatique : il admet que la limite élastique est atteinte lorsqu'une certaine relation $\tau \geq f(\sigma)$ est vérifiée, la fonction f étant à déterminer.
Dans le plan (σ,τ) des cercles de Mohr (figure 10),la fonction f représente une courbe particulière qu'on nomme courbe limite ou intrinsèque. La limite élastique est atteinte lorsque le cercle extérieur de Mohr devient tantent à la courbe limite. Ainsi la courbe limite est l'enveloppe des cercles extérieurs des systèmes de contrainte entraînant un début de déformation plastique dans la section définie par le point de tangence avec la courbe limite. Sur la figure 10, différents états de contrainte sont représentés : cercle C_1 correspond à une traction pure



- <u>Figure 10</u> -

C_2 à une compression pure et C_3 à un état tridimensionnel quelconque.

Le critère de Tresca-Coulomb correspond à deux droites parallèles à l'axe σ, d'ordonnées $\tau_M = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$
Mais si la tension hydrostatique intervient, la courbe limite $\tau = f(\sigma)$ prend en général une allure parabolique dont le sommet S situé du côté des tractions joue un rôle particulier. Il correspond en effet au cas où les trois contraintes principales sont égales $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$ et représente la <u>décohésion</u> de la matière.

L'aspect de la courbe intrinsèque est très différent selon que le corps est fragile ou ductile. Dans le cas d'un corps fragile, la courbe intrinsèque est très ouverte (figure 11); la matière resiste très peu à la traction (cercle C_1') mais résiste bien à la compression et en cisaillement (le matériau n'est pas symétrique). Les critères de Rankine ou de Stassi traduisent asses bien ce schéma. On peut remarquer que les cisaillements critiques ne sont plus les cisaillement principaux et s'en écartent d'autant plus que le corps est plus fragile. On constate effectivement dans le cas des corps fragiles que les lignes de glissement font avec l'axe de traction un angle supérieur à 45° alors que cet angle est toujours égal à 45° pour les corps ductiles.

τ

C1

S

σ

C2

matériau fragile

fig. 11

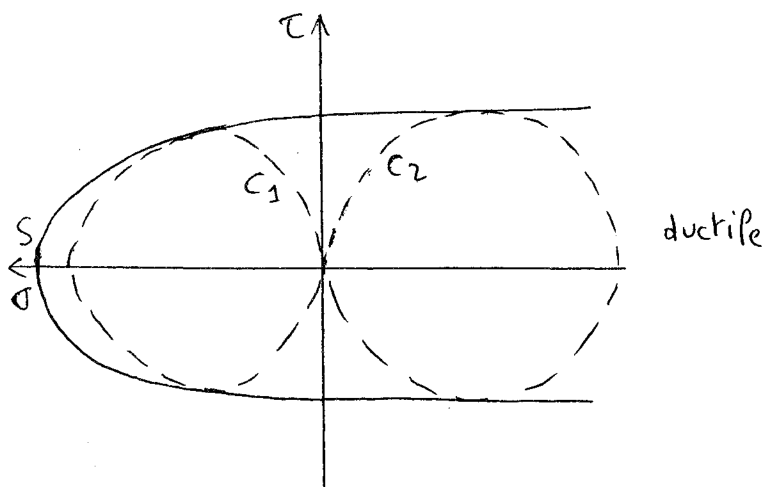
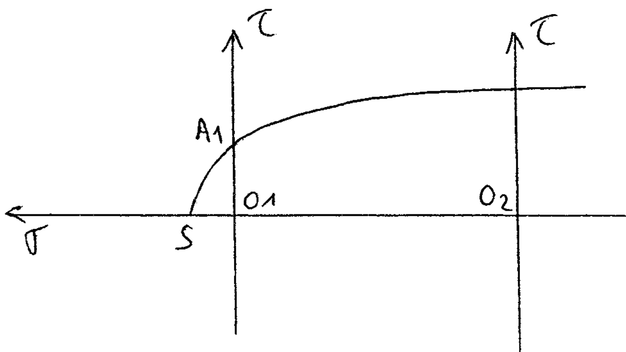


Figure 11

Pour les matériaux ductiles, la courbe intrinsèque est très fermée : la matière résiste bien à la décohésion mais mal au cisaillement. La résistance à la compression diffère peu de celle à la traction (le matériau est symétrique). Les critères de Tresca et Von Misès correspondent bien à ce cas.

Remarque 1 : Les fluides qui ne présentent aucune résistance au glissement ont une courbe intrinsèque pratiquement confondue avec l'axe σ.

Remarque 2 : Etat correspondant ; examinons le cas de deux matériaux ayant les mêmes courbes intrinsèques mais décalées l'une par rapport à l'autre (figure 12).

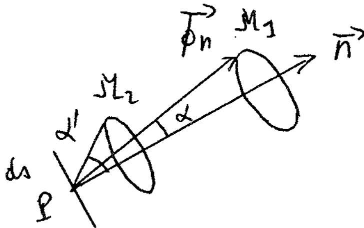


- Figure 12 -

L'un O_1S est fragile, l'autre O_2S est ductile. Ajoutons aux contraintes subies par le matériau 1 une compression uniforme homogène égale à O_1O_2 ; sa courbe intrinsèque est déplacée vers la droite de O_1O_2 et le matériau 1 se trouve dans le même état que le matériau 2 ("état correspondant") Il est donc devenu ductile.
Ceci peut expliquer l'existence dans la croute terrestre à grande profondeur de minéraux fragiles dans des conditions normales.

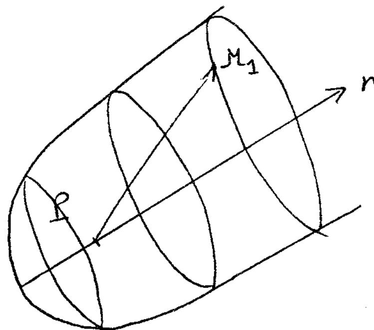
Remarque 3 : Surface intrinsèque
Dans le cas des critères de Tresca et Misès, la surface limite est un cylindre d'axe parallèle à la trissectrice représentant la tension hydrostatique. Si l'on tient compte de cette tension, la surface limite prend l'allure d'un paraboloïde dont le sommet est situé du côté des

tensions hydrostatiques de traction.
Considérons un élément de surface ds autour d'un point P du solide (figure 13). Appliquons au solide une sollicitation telle que la



- Figure 13 -

contrainte $\vec{\phi}_n$ fasse un angle α avec la normale $\vec{n}$ et faisons croître cette contrainte jusqu'à ce que la limite élastique sur l'élément ds soit atteinte : point M_1. Si le milieu est isotrope, PM_1 ne dépend que de α : le lieu de M_1 pour toutes les contraintes faisant un angle α avec la normale $\vec{n}$ est un cercle centré sur la normale.
Pour une autre valeur α' de l'angle, on trouvera un autre cercle.
L'enveloppe est une surface de révolution autour de $\vec{n}$ appelée surface intrinsèque. La courbe intrinsèque est la méridienne de cette surface intrinsèque car elle est tracée dans le plan (σ,τ). (figure 14).



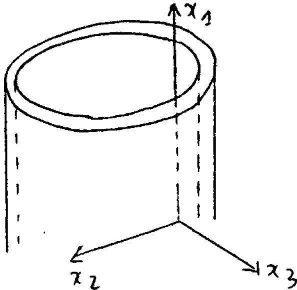
- Figure 14 -

Remarque 4 : le critère de Stassi est le plus général puisqu'il peut représenter à la fois le comportement ductile ou fragile.

Remarque 5 : l'utilisation des courbes intrinsèques a été développée essentiellement par Laquot.

VI.2.8. - Détermination expérimentale d'un critère

De nombreux essais ont été effectués pour déterminer la validité des critères de résistance.
Le principe général de ce type d'essais est la comparaison de deux tests, par exemple la traction et la torsion.
Considérons un tube soumis à un effort de traction et à un couple de torsion.
Si le tube est mince, on peut considérer qu'on a un état de contrainte plane c'est-à-dire que les tension et cisaillement parallèles à l'une des 3 directions sont nulles (axe x_3 par exemple figure 15).



- Figure 15 -

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le cas particulier de la torsion,

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminons les tensions principales.

- Méthode analytique :

$$\begin{vmatrix} \sigma - \lambda & \tau & 0 \\ \tau & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Soit $(\sigma-\lambda)\,\lambda^2 + \lambda\tau^2 = 0$

$$\lambda \left[(\sigma-\lambda)\,\lambda + \tau^2 \right] = 0 \qquad \text{soit } \lambda = 0$$

$$\lambda^2 - \sigma\lambda - \tau^2 = 0$$

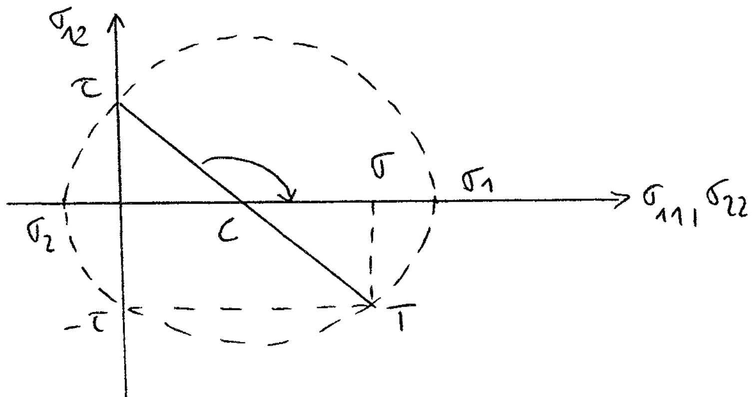
$$\text{soit } \lambda = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2 + 4\tau^2}{4}}$$

$$\lambda = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\text{Soit } \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

- Construction de Mohr (figure 16)



- Figure 16 -

$R \left| \begin{array}{l} \sigma_{22} = 0 \\ \sigma_{12} = \tau \end{array} \right.$ $\quad T \left| \begin{array}{l} \sigma_{11} = \sigma \\ -\sigma_{12} = -\tau \end{array} \right.$ $\quad C \left| \begin{array}{l} \sigma/2 \\ 0 \end{array} \right.$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Appliquons les relations issues des critères de plasticité :

- Critère de Tresca : (rel.VI.13)

$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_E$ $\quad$ σ_E : contrainte à partir de laquelle il y a déformation plastique dans un essai avec un état de contrainte uniaxiale (traction).

soit :

$$2\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sigma_E$$

$$\sigma^2 + 4\sigma^2 = \sigma_E^{\,2} \qquad (21)$$

- Critère de Von Misès (rel.VI.15)

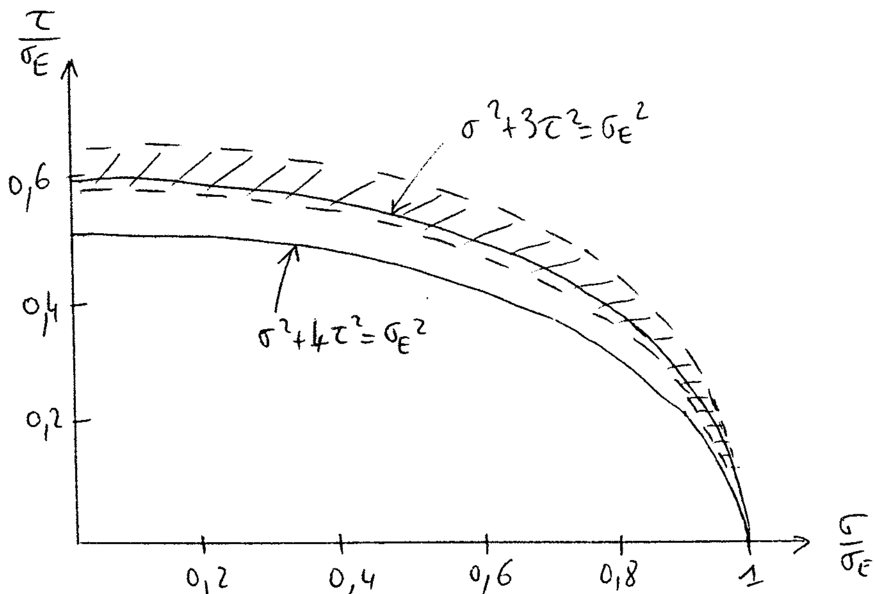
$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^{\,2} + \sigma_1^{\,2} = 2\sigma_E^{\,2}$$

soit

$$\left[2\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}\right]^2 + \left[\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}\right]^2 + \left[\frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right) \tau^2}\right]^2 = 2\sigma_E^{\,2}$$

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_E^{\,2} \qquad (22)$$

Ces deux équations définissent deux ellipses dans le plan (σ,τ) (fig.17)



- Figure 17 -

L'expérience consiste à appliquer simultanément une contrainte de traction et un couple de torsion et à déterminer le domaine plastique ; pour ce faire, on applique une contrainte de traction constante et on exerce un couple de torsion croissant jusqu'au domaine plastique : on obtient alors la valeur de τ et par voie de conséquence le point de coordonnées (τ,σ) que l'on peut porter sur le diagramme.

On trouve ainsi sur ce diagramme l'ensemble des points expérimentaux correspondant à des essais faits sur des tubes d'acier doux, de cuivre et d'aluminium (ces points se situent dans l'aire hachurée et se placent approximativement sur l'ellipse $\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_E^2$ sauf dans le cas de l'acier doux).

VI.3. - CALCUL DU COEFFICIENT DE SECURITE PAR LE CRITERE DE STASSI

VI.3.1. - Coefficient de sécurité et contrainte équivalente statiques

Le critères de Stassi s'écrit pour un état de contrainte limite $(\sigma_{oct},\tau_{oct})$ (relation VI.19).

$$9\tau_{oct}^2 + 6(\sigma'_E - \sigma_E)\sigma_{oct} = 2\sigma_E\sigma'_E$$

avec
$$\begin{cases} \tau_{oct}^2 = \frac{1}{9}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right] \\ \sigma_{oct} = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3} \end{cases}$$

Soit un état de contrainte quelconque σ_{ij} à l'intérieur de la surface limite. Il faut multiplier toutes ses composantes par le coefficient de sécurité α pour atteindre la surface limite :

$$9\alpha^2\tau_{oct}^2 + 6(\sigma'_E - \sigma_E)\alpha\,\sigma_{oct} = 2\sigma_E\sigma'_E$$

ou

$$\frac{2\sigma_E\sigma'_E}{\alpha^2} - 6(\sigma'_E - \sigma_E)\frac{\sigma_{oct}}{\alpha} - 9\tau_{oct}^2 = 0$$

En résolvant cette équation en $\frac{1}{\alpha}$ et en prenant la valeur positive (chargement progressif sans passage au zéro), on a :

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{3(\sigma'_E-\sigma_E)\sigma_{oct} + \sqrt{9(\sigma'_E-\sigma_E)^2\sigma_{oct}^2 + 2\sigma_E\sigma'_E\, 9\tau_{oct}^2}}{2\sigma_E\,\sigma'_E}$$

soit

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{\sigma_E\sigma'_E}\left[(\sigma'_E-\sigma_E)\sigma_{oct} + \sqrt{(\sigma'_E-\sigma_E)^2\sigma_{oct}^2 + 2\sigma_E\sigma'_E\,\tau_{oct}^2}\right] \quad (23)$$

Introduisons le rapport

$$\rho = \frac{\sigma'_E}{\sigma_E}$$

On obtient

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{\sigma'_E}\left[(\rho-1)\sigma_{oct} + \sqrt{(\rho-1)^2\,\sigma_{oct}^2 + 2\rho\,\tau_{oct}^2}\right]$$

Si $\rho = 1$, le matériau est symétrique et le critère deStassi est identique au critère de Von Misès : on a alors :

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{\sigma_E}\sqrt{2\,\tau_{oct}^2}$$

soit

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\frac{\sigma_E}{\tau_{oct}} \quad (24)$$

La contrainte équivalente est par définition la contrainte de traction possédant le même coefficient de sécurité soit :

$$\sigma_{equ} \times \alpha = \sigma_E$$

d'ou

$$\sigma_{equ} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{\rho}\left[(\rho-1)\,\sigma_{oct} + \sqrt{(\rho-1)^2\,\sigma_{oct}^2 + 2\rho\tau_{oct}^2}\right] \quad (25)$$

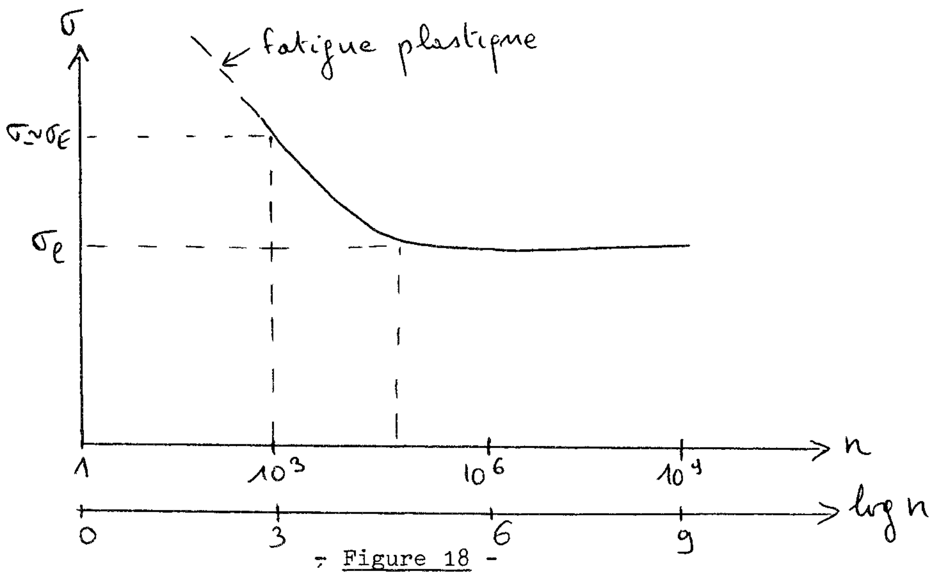
si $\rho = 1$

$$\sigma_{equ} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\tau_{oct} \quad (26)$$

VI.3.2. - Coefficient de sécurité dynamique

- à - Notion de fatigue ou d'endurance

Lorsqu'un matériau est soumis à des sollicitation périodiques (flexion rotative), on peut observer sa rupture pour des contraintes inférieures à la limite élastique. On dit que le matériau se fatigue : pour une contrainte donnée, l'éprouvette ne supporte que n alternances. On peut tracer la courbe = f(n) ou f(log n) qu'on appelle diagramme de Wöhler.
Dans le cas des aciers, cette courbe à l'allure indiquée par la fig.18.

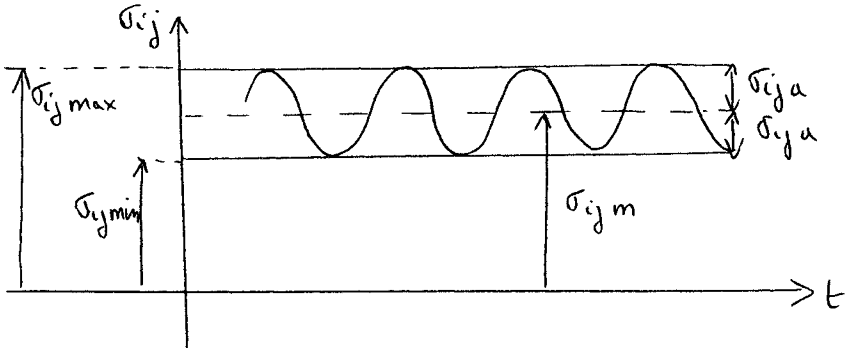


- Figure 18 -

On peut déterminer une limite d'endurance ou de fatigue du matériau σ_e, en dessous de laquelle, on n'observe pas de rupture du matériau, quel que soit n.

- b - Sollicitations périodiques

Supposons que chaque composante σ_{ij} du tenseur des contraintes ait une variation périodique (en phase).
On peut définir une composante statique de cette contrainte ou contrainte moyenne et une composante alternée (figure 19).



- Figure 19 -

$$\begin{cases} \sigma_{ijm} = \dfrac{\sigma_{ijmax} + \sigma_{ijmin}}{2} \\ \sigma_{ija} = \dfrac{\sigma_{ijmax} - \sigma_{ijmin}}{2} \end{cases} \qquad (27)$$

Remarques :- on admet généralement que l'endurance d'une pièce ne dépend pas de la loi de variation dans l'intervalle (σ_{min},σ_{max})
- et que l'influence de la fréquence du cycle est négligeable.

- c - Contrainte équivalente moyenne et alternée

Nous appellerons contrintes normales octoédriques, moyenne ou alternée :

$$\sigma_{octm} = \frac{\sigma_{11m} + \sigma_{22m} + \sigma_{33m}}{3}$$
$$\sigma_{octa} = \frac{\sigma_{11a} + \sigma_{22a} + \sigma_{33a}}{3} \qquad (28)$$

De même, les contraintes tangentielles octaédriques, moyenne ou alternée sont :

$$\tau_{oct}{}^{2}{}_{,m} = \frac{1}{9}\left[(\sigma_{11m} - \sigma_{22m})^{2} + \dots\dots + 6\,(\sigma_{12m}^{2} + \dots)\right]$$

$$\tau_{oct}{}^{2}{}_{,a} = \frac{1}{9}\left[(\sigma_{11a} - \sigma_{22a})^{2} + \dots\dots + 6\,(\ {}_{12a}^{2} + \dots)\right]$$

On peut alors définir, comme en statique, une contrainte équivalente moyenne et une contrainte équivalente alternée :

$$\sigma_{equ\ m} = \frac{3}{2}\ \frac{1}{\rho}\left[(\rho-1)\sigma_{oct,m} + \sqrt{(\rho-1)^{2}\sigma_{oct,m}^{2} + 2\rho\tau_{oct,m}^{2}}\right]$$

$$\sigma_{equ\ a} = \frac{3}{2}\ \frac{1}{\rho}\left[(\rho-1)\sigma_{oct,a} + \sqrt{(\rho-1)^{2}\sigma_{oct,a}^{2}\quad 2\rho\tau_{oct,a}^{2}}\right] \qquad (29)$$

Remarque : Nous appliquons les relations (29) à un phénomène de rupture par conséquent pour ρ nous prendrons le rapport :

$$\rho = \frac{\sigma_{rc}}{\sigma_{rt}} = \frac{\text{contrainte réelle de rupture compression}}{\text{contrainte réelle de rupture en traction}}$$

Comme l'essai de compression n'est pas toujours réalisable jusqu'à rupture, on peut utiliser la relation (VI.20).

$$\tau_{r} = \sqrt{\frac{\sigma_{rc}\sigma_{rt}}{3}}$$

et déterminer ρ à partir des essais de traction et de torsion

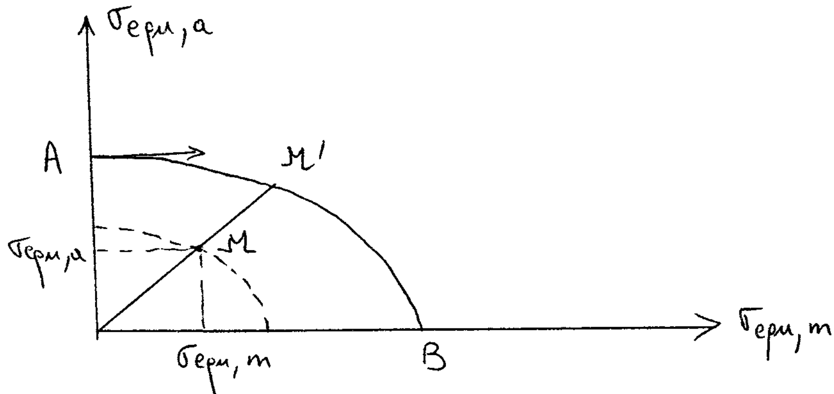
$$\rho = \frac{\sigma_{rc}}{\sigma_{rt}} = 3\left(\frac{\tau_{r}}{\sigma_{rt}}\right)^{2}$$

- d - Critère de limite de fatigue

La contrainte équivalente alternée correspondant à la limite de fatigue est fonction de la contrainte équivalente moyenne. La relation la mieux vérifiée expérimentalement (cf cours 4e année Propriétés mécaniques des matériaux) est la relation parabolique (fig.20).

$$\frac{\sigma_{equ,a}}{A} + \left(\frac{\sigma_{equ,m}}{B}\right)^2 = 1$$

où A et B sont des constantes déterminées lors des essais de flexion rotative (ou alternée) et de traction statique.



- Figure 20 -

Calcul de A et B :

Essai de traction statique : la rupture se produit

pour $\begin{cases} \sigma_{11,m} = 0 \\ \sigma_{22,m} = 0 \\ \sigma_{33,m} = \sigma_{2t} \end{cases}$ $\begin{cases} \sigma_{equ,m} = \sigma_{33,m} \\ \sigma_{equ,a} = 0 \end{cases}$

d'où $\boxed{\sigma_{33,m} = \sigma_{2t} = B}$

Essai de flexion rotative : la rupture se produit pour

$$\begin{cases} \sigma_{11,a} = 0 \\ \sigma_{22,a} = 0 \\ \sigma_{33,a} = e \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_{equ,m} = 0 \\ \sigma_{equ,a} = e \end{cases} \qquad \text{soit} \quad \boxed{\sigma_e = A}$$

Le critère s'écrit ainsi :

$$\boxed{\frac{\sigma_{equ,a}}{\sigma_e} + \left(\frac{\sigma_{equ,m}}{\sigma_{rt}}\right)^2 = 1} \qquad (30)$$

Remarque : La limite de fatigue varie en fonction de l'état de surface et des dimensions de l'éprouvette. L'essai de référence donnant σ_e devra donc être mené sur une éprouvette ayant même état de surface et sensiblement de dimensions équivalentes.

- e - Coefficient de sécurité :

Le coefficient de sécurité dynamique β est égal à (fig.20)

$$\beta = \frac{OM'}{OM}$$

Un état de contrainte est défini par $\sigma_{equ,m}$ et $\sigma_{equ,a}$.

Pour l'amener à l'état limite, on multiplie toutes ses composantes moyennes et alternées par β. Donc $\sigma_{equ,a}$ et $\sigma_{equ,m}$ sont multipliées par β et on doit avoir :

$$\beta \frac{\sigma_{equ,a}}{\sigma_e} + \beta^2 \left(\frac{\sigma_{equ,m}}{\sigma_{rt}}\right)^2 = 1$$

soit

$$\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta} \frac{\sigma_{equ,a}}{\sigma_e} - \left(\frac{\sigma_{equ,m}}{\sigma_{rt}}\right)^2 = 0$$

la racine positive de cette équation est :

$$\boxed{\frac{1}{\beta} = \frac{\sigma_{equ,a}}{2\sigma_e} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{equ,a}}{\sigma_e}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_{equ,m}}{\sigma_{rt}}\right)^2}}$$

CHAPITRE VII

LES EQUATIONS GENERALES DE LA THEORIE DE L'ELASTICITE

VII.1.- Rappel d'analyse vectorielle

- gradient d'un scalaire f (x, y, z) : c'est un vecteur dont les trois composantes sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

- divergence d'un vecteur : c'est un scalaire $\vec{a} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

- rotationnel d'un vecteur : c'est un vecteur

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{i}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{i} \wedge \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_1} + \vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_2} + \vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_3}$$

produit vectoriel : $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ou $\vec{a} \times \vec{b}$ $\qquad (\operatorname{rot} \vec{a})_i = \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_k}\right)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i}\,(a_2b_3 - a_3b_2) + \vec{j}\,(a_3b_1 - a_1b_3) + \vec{k}\,(a_1\,b_2 - a_2\,b_1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

- <u>opérateur laplacien</u> : on appelle opérateur laplacien

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^{\,2}} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^{\,2}} = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^{\,2}}$$

Si on l'applique à une fonction scalaire : $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\,2}} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^{\,2}} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^{\,2}}$

si on l'applique à un vecteur :

$$\Delta\vec{a} = \frac{\partial^2\vec{a}}{\partial x_1^{\,2}} + \frac{\partial^2\vec{a}}{\partial x_2^{\,2}} + \frac{\partial^2\vec{a}}{\partial x_3^{\,2}} \qquad \vec{a} = \vec{i}\,a_1 + \vec{j}a_2 + \vec{k}\,a_3$$

soit $\Delta\vec{a} = \vec{i}\;\Delta a_1 + \vec{j}\;\Delta a_2 + \vec{k}\;\Delta a_3$: c'est un vecteur

<u>Vecteur symbolique "del" on nabla</u>

On appelle ainsi un opérateur vectoriel (opérateur qui porte souvent le nom d'opérateur hamiltonien) désigné par le symbole ∇

$$\nabla = \vec{i}\;\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{j}\;\frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{k}\;\frac{\partial}{\partial x_3}$$

ainsi pour un scalaire $\nabla f = \overrightarrow{grad}\,f$

produit scalaire $\nabla . \vec{a} = \mathrm{diV}\,\vec{a} = \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial a_2}{\partial\,x_2} + \dfrac{\partial a_3}{\partial x_3}$

$$\nabla \wedge \vec{a} = \text{rot } \vec{a}$$

De même $\Delta f = \nabla^2 f$ $\quad \nabla \vec{a} = \nabla^2 \vec{a}$

$\nabla^2 = \Delta$ est un opérateur scalaire

Formules d'analyse vectoriellle usuelles

$$\text{grad div } \vec{a} = \text{rot. rot } \vec{a} + \Delta\vec{a}$$

$$\text{div } (\overrightarrow{\text{grad}}\ f) = \Delta f$$

$$\text{div } (\text{rot } \vec{a}) = 0 \qquad \text{div } (\Delta\vec{a}) = \Delta\ (\text{div } \vec{a})$$

$$\text{rot } (\overrightarrow{\text{grad}} f) = 0 \qquad \Delta(\overrightarrow{\text{grad}}\ f) = \text{grad } \Delta f$$

car $\Delta(\overrightarrow{\text{grad}}\ f) = \text{grad div } (\overrightarrow{\text{grad}}\ f) - \text{rot. rot } \overrightarrow{\text{grad}}\ f$

$$= \overrightarrow{\text{grad}}\ \Delta f - 0$$

Pour résoudre les problèmes d'équilibre on dispose de deux méthodes : dans la première on recherche à calculer les déplacements d'où l'on déduit ensuite les contraintes (méthode de LAME et CLAPEYRON) ; dans la deuxième on cherche à calculer directement les contraintes.

VII.2.- Equations d'équilibre (Méthode de LAME et CLAPEYRON)- Calcul des déplacements

Déterminons les équations d'équilibre des corps solides isotropes. On part de l'équation générale de l'équilibre: (equ.III.18)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_{vi} = 0 \qquad F_{vi} = \rho g_i$$ si le champ de forces de volume est la pesanteur.

Exprimons cette équation III.18 en fonction du tensuer déformation:

on a :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\ (e_{ij} + e_{ij}) = \frac{1}{2}\ \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$ (cf chapitre IV relation (7))

et pour un corps isotrope on dispose des équations de LAME (equ.V.38)

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij}\ \varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

Portons l'équation V.38 dans III.8.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} \qquad \delta_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial x_j} = \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial x_i}$$

$\uparrow$

Σ_j puisque j est indice muet

En substituant ε_{ij} par la relation III (4) ; on obtient les équations d'équilibre sous la forme :

$$\lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + F_{vi} = 0$$

Σ_k et j
$$(\lambda+\mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + F_{vi} = 0 \qquad (1)$$

Ces équations aux dérivées partielles s'écrivent en notation vectorielle

$$\boxed{(\lambda+\mu) \text{ grad } (\text{div } \overline{u}) + \mu \Delta \overline{u} + \overline{F}_v = 0} \qquad (2)$$

$$\Sigma_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \equiv \Delta \overline{u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \equiv \text{div } \overline{u}$$

Remarque 1 : si $\overline{u}$ dérive d'un potentiel V cette expression (2) se simplifie : en effet :

$$u_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

et grad div (grad V) = grad (ΔV) et Δ(grad V) = grad (ΔV)

soit : $$\boxed{(\lambda + 2\mu) \text{ grad } (\Delta V) + \overline{F}_v = 0} \qquad (2')$$

Remarque 2 : On peut exprimer λ et μ en fonction de E et ν (voir chapitre V : relation 45).

On a alors :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)\ (1-2\nu)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \lambda + \mu = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}$$

L'équation (2) s'écrit alors :

$$\Delta\bar{u} + \frac{1}{1-2\nu}\ \text{grad}\ \text{div}\ \bar{u} + \bar{F}\ \frac{2(1+\nu)}{E} = 0 \qquad (2")$$

Remarque 3 : L'équation (2) peut aussi s'écrire de façon différente, en effet grad div $\bar{u}$ = rot. rot $\bar{u}$ +Δ $\bar{u}$

$$(\lambda+\mu)\ \text{rot. rot}\ \bar{u} + (\lambda + 2\mu)\ \Delta\bar{u} + \bar{F} = 0 \qquad (2"')$$

ou

$$(\lambda+2\mu)\ \text{grad div}\ \bar{u} - \mu\ \text{rot. rot.}\ \bar{u} + \bar{F} = 0 \qquad (2"')$$

Le cas le plus important est celui où la déformation est due non pas à des forces volumiques, mais à des forces appliquées à la surface du corps (Fi=0). Alors l'équation (2) s'écrit :

$$\boxed{(\lambda+\mu)\ \text{grad div}\ \bar{u} + \mu\ \Delta\bar{u} = 0} \qquad (4)$$

ou en fonction de E et ν (2")

$$\boxed{(1-2\nu)\ \Delta\bar{u} + \text{grad div}\ \bar{u} = 0} \qquad (4") \quad \text{div grad}\ V = \Delta V$$

si $\bar{u}$ = grad V ⇒ $\boxed{\text{grad}\ (\Delta V) = 0}$ (4')

Les forces extérieures n'entrent dans la solution que par l'intermédiaire des conditions aux limites.

Remarque : appliquons l'opération div à l'équation 4":

$$(1-2\nu)\ \text{div}\ (\Delta\bar{u}) + \text{div}\ \ \text{grad div}\ \bar{u} = 0$$

$$(1-2\nu)\ \Delta(\text{div}\ \bar{u}) + \Delta\text{div}\ \bar{u} = 0 \qquad \text{div grad} = \Delta$$

soit : $\boxed{\Delta\ \text{div}\ \bar{u} = 0}$ (5)

div $\bar{u}$ détermine la variation de volume au cours de la déformation :

car div $\overline{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \varepsilon_{ii}$

$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$; Div $\overline{u}$ est une fonction harmonique

Appliquons l'opérateur Δ à 4" ; on obtient

$$\Delta\Delta\overline{u} = 0 \qquad (6)$$

A l'équilibre, le vecteur déformation satisfait à l'équation biharmonique

Conditions aux limites : (cf.§.III.2.7)

Les équations d'équilibre doivent être satisfaites ∀ le point considéré du corps. Les contraintes varient à l'intérieur du corps et lorsqu'on arrive à la périphérie, elles doivent être en équilibre avec les forces extérieures agissant à la surface du corps. Les conditions d'équilibre à la surface peuvent être obtenues à partir de la relation III.2..

$X_{Si} = \sigma_{ij}\, n_j$ (7) $\quad \overline{n}$: vecteur unité dirigé suivant la normale extérieure à la surface.

X_{Si} étant les composante par unité de surface de la force appliquée sur la surface du corps au point considéré.

La condition (7) doit être vérifiée sur toute la surface.
Si donc on a déterminé l'état de contrainte dans un corps soumis à l'action de forces données, il est nécessaire de résoudre les équations d'équilibre et les solutions trouvées doivent satisfaire aux équations aux limites (7).
Or les équations d'équilibre contiennent 6 composantes : elles ne sont donc pas suffisantes pour donner les valeurs de celles-ci.
Pour obtenir la solution, il faut tenir compte des déformations élastiques du corps.

Cas particulier des déformations planes

L'une des composantes du vecteur déplacement est nulle (par ex $u_3 = 0$) et u_1 et u_2 ne dépendent pas de z. Les composantes ε_{33}, ε_{13} et ε_{23} du tenseur déformation s'annulent donc

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

ainsi que σ_{13} et σ_{23} (voir chap. V équation (38)) mais non σ_{33} (contrainte longitudinale) dont l'existence doit assurer la constance de la longueur du corps suivant l'axe x_3.
Puisqu'aucune quantité ne dépend de z, les équations d'équilibre (en l'absence de forces extérieures volumiques)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

se réduisent aux deux équations :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \tag{7}$$

Les expressions les plus générales des fonctions σ_{11}, σ_{12}, σ_{22} satisfaisant à ces équations sont :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} \qquad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} \tag{8}$$

χ étant une fonction arbitraire de x et y

χ doit vérifier une équation : en effet σ_{11}, σ_{12} et σ_{22} s'expriment en réalité en fonction des deux quantités u_1 et u_2 et ne sont donc pas indépendantes.
On a en effet d'après IV.38 : $\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2\,(\lambda+\mu)\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$

or : $\sigma_{11} + \sigma_{22} = \Delta\chi$ soit $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \equiv \text{div}\,\overline{u}$

Puisque div $\overline{u}$ d'après la relation (5) est une fonction harmonique , on en déduit que la fonction χ vérifie l'équation

$$\boxed{\Delta\Delta\chi = 0} \tag{9}$$

donc elle est biharmonique. On appelle χ fonction des contraintes (ou fonction d'AIRY)

Le problème plan une fois résolu et la fonction χ connue, la contrainte longitudinale σ_{33} est donnée par la formule suivante (éq. IV.38)

$$\sigma_{33} = \lambda \ (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = \nu \ (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad \text{d'après IV.39}$$

$$\sigma_{33} = \nu \Delta \chi \qquad (10)$$

VII.,3.- Méthode des conditions de compatibilité - Calcul direct des contraintes

Pour qu'un solide reste continu lors d'une déformation, les déformations ε_{ij} doivent satisfaire à certaines conditions dites de compatibilité. Les six composantes de la déformation, en un point quelconque, sont complètement déterminées par les trois fonctions u_1, u_2, u_3 qui représentent les composantes du vecteur déplacement. Ce ne sont donc pas des fonctions arbitraires de x_1, x_2, x_3 mais des fonctions qui dépendent des relations qui découlent des équations III.1.

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad (11)$$

qu'il faut intégrer.

Introduisons comme inconnues auxiliaires les $\ddot{\omega}_{ij}$ du tenseur rotation et les $\bar{\omega}_{ij}$ étant supposés connus, on obtient les u_i en intégrant les 3 équations aux différentielles totales :

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = (\bar{\omega}_{ij} + \varepsilon_{ij}) \ dx_j \qquad (11')$$

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{\omega}_{ij} &= \frac{1}{2} (e_{ij} - e_{ij}) \quad : V(7) \qquad e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (e_{ij} + e_{ji}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \right.$$

$$\varepsilon_{ij} + \bar{\omega}_{ij} = e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Il y a 3 x 3 conditions pour que ces équations soient intégrales.
Par exemple : on a

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \varepsilon_{13} + \omega_{13} = \varepsilon_{13} - \omega_{31}$$

d'où $du_1 = \varepsilon_{11}\, dx_1 + (\varepsilon_{12} + \omega_{12})\, dx_2 + (\varepsilon_{13} + \omega_{13})\, dx_3$

car $\omega_{11} = 0$; $\bar{\omega}_{ij}$ est Antisymétrique

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2\, \partial x_1}$$

Pour que ceci soit intégrable il faut que :

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_3} = \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_{13}}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_3} = \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_{13}}{\partial x_2}$$

Les neuf conditions s'écrivent donc sous la forme générale

$$\frac{\partial \bar{\omega}_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} \qquad (12)$$

On peut simplifier ces conditions en permettant circulairement les indices ijk.

ijk $$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j}$$

jki $$\frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} = \frac{\partial \varepsilon_{ji}}{\partial x_k} + \frac{\partial \omega_{ji}}{\partial x_k}$$

kij $$\frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ki}}{\partial x_j} = \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega_{kj}}{\partial x_i}$$

On ajoute membre à membre et en tenant compte du fait :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

$$\omega_{ij} = - \omega_{ji}$$

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x_j} = 0 \qquad (13)$$

En combinant avec (12), il vient :

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x_j} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} = - \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x_i}$$

soit $\frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x_i} = \frac{\partial \varepsilon_{ji}}{\partial x_k} - \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j}$ (14) qui remplace (12)

Les équations (14) fournissent, lorsqu'on connait les ε_{ij}, les neuf dérivées partielles :

$$\frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x_i}$$

des coordonnées du tenseur rotation (dont trois seulement sont indépendantes : ω_{ij} étant antisymétrique). On obtient ces coordonnées en intégrant trois équations aux différentielles totales de la forme :

$$d\, \omega_{jk} = \sum_i \left(\frac{\partial \varepsilon_{ji}}{\partial x_k} - \frac{\partial \varepsilon_{ki}}{\partial x_j} \right) dx_i \qquad (15)$$

Il y a, à première vue, 3x3 = 9 conditions pour que ces différentielles soient intégrables, mais en fait elles se réduisent à 6.

Développement par exemple $d\,\omega_{12}$

$$d\omega_{12} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1}\right) dx_2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1}\right) dx_3$$

P_1 $\quad$ P_2 $\quad$ P_3

$j = 1$

$k = 2$

Ceci est une différentielle totale exacte si on a par exemple la relation :

$$\frac{\partial P_1}{\partial x_3} = \frac{\partial P_3}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{21}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2\, \partial x_1} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial 2_{x_1}}$$

que l'on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1}\right]$$

on peut généraliser $\dfrac{\partial P_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial P_j}{\partial x_i}$

Les conditions de compatibilité se mettent sous la forme

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k}\right]} \qquad (16)$$

On peut remarquer que $\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial x_j \partial x_i}$: il y a donc seulement 6 conditions de compatibilité.

On obtient ainsi ω_{ij} à l'aide de (15), puis les u_i par la relation (11')

La connaissance de ces conditions présente un grand intérêt dans l'étude des solides élastiques. Les déformations étant liées physiquement aux contraintes existant dans les solides et aux variations de température, les conditions de compatibilité fourniront des conditions auxquelles doivent satisfaire ces contraintes et ces variations de température.

Equations de Beltrami

Nous pouvons exprimer (16) en fonction des contraintes. En l'absence de forces volumiques, le système d'équations cherché contient, en plus des trois équations :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{(III.18)}$$

celles qui proviennent du fait que les six composantes de ε_{ij} ne sont pas indépendantes :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_k \partial x_j}$$

pour un k donné, on a deux équations car $k \neq i$ et j (pour $k = i$ ou j, on a une identité).
Pour i et j donnés, faisons varier k : on a trois équations, compte-tenu des identités $k = i$ ou j.

Sommons : on obtient :

$$\Delta\varepsilon_{ij} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ki}}{\partial x_k \partial x_j} \qquad (17)$$

Mais d'après l'expression V.39, on peut écrire ε_{ij} en fonction de σ_{ij}

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right) \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \underset{\Sigma_\ell}{\sigma_{\ell\ell}}$$

L'équation (17) vient : en tenant compte des équations d'équilibre II.5

$$\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\Delta\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\,\Delta\sigma_{\ell\ell} + \frac{1}{3K}\frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\nu}{E}\delta_{kj}\frac{\partial \sigma_{ll}}{\partial x_k \partial x_i} + \left(\frac{\lambda+\nu}{E}\right)\frac{\partial^2 \sigma_{kj}}{\partial x_k \partial x_i}$$

$$-\frac{\nu}{E}\delta_{ki}\frac{\partial \sigma_{ll}}{\partial x_k \partial x_j} + \left(\frac{\lambda+\nu}{E}\right)\frac{\partial^2 \sigma_{ki}}{\partial x_k \partial x_j}$$

car $\varepsilon_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{3K}$ $\quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ (voir chapitre V) $\quad$ 0 car $\frac{\partial \sigma k_i}{\partial x_k} = 0$ (II.5)

$$\left(\frac{1+\nu}{E}\right) \Delta\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\, \Delta\sigma_{ll} + \frac{1-2\nu}{E} \frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} = - \frac{\nu}{E}\, \delta_{kj} \frac{\partial^2\sigma_{ll}}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\nu}{E}\, \delta_{ki} \frac{\partial^2\sigma_{ll}}{\partial x_k \partial x_j}$$

$$+ \frac{1}{E} \frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_i\, \partial x_j} - \frac{2\nu}{E} \frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_i \partial x_j}$$

soit $(1 +\nu)\Delta\sigma_{ij} -\nu\delta_{ij}\Delta\sigma_{ll} + \dfrac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ (17')

si $i = j$

$$(1+\nu)\ \Delta\sigma_{ii} -\nu\Delta\sigma_{ll} + \frac{\partial^2\ \sigma_{kk}}{\partial x_i^{\ 2}} = 0$$

Sommons par rapport à i :

$$\sum_i \frac{\partial^2\ \sigma_{kk}}{\partial x_i^{\ 2}} = \Delta_{kk}$$

$$(1+\nu)\Delta\sigma_{ii} -\nu\Delta\sigma_{ll} + \Delta\sigma_{kk} = 0$$

soit finalement car dans ce cas $\sum_i \Delta\sigma_{ii} = \sum_k \Delta\sigma_{kk} = \sum_\ell \Delta\sigma_{\ell\ell}$

$$\Delta\sigma_{ll} = 0 \qquad (18)$$

σ_{ll} est donc une fonction harmonique

Ainsi les équations précédentes (17') se réduisent à :

$$\boxed{(1+\nu)\ \Delta\sigma_{ij} + \frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} = 0} \qquad (19)\ \text{équation de Beltrami}$$

Remarque 1 : Ces équations restent en vigueur si le corps subit des forces volumiques extérieures constantes dans tout le volume.

Appliquons à (19) l'opérateur Δ: $\Delta\Delta\sigma_{ij} = 0$

Ce qui prouve que les σ_{ij} sont des fonctions biharmoniques. Ces résultats découlent de (5) et (6), étant donné la relation linéaire entre σ_{ij} et ε_{ij}.

si au lieu de $F_{vi} = 0$ on a $F_{vi} = C^{te}$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_{vi} = 0 \qquad \text{II.5.}$$

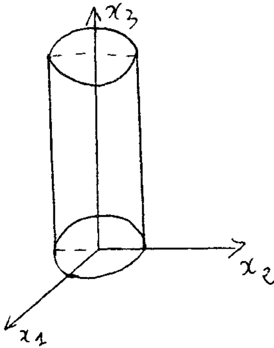
$$\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_j \partial x_k} = - \frac{\partial F_{vi}}{\partial x_k} = 0 \quad \text{car} \quad F_{vi} = C^{te}$$

donc les équations de Beltrami restent valables.

Remarque 2 : Si on a déterminé les contraintes σ_{ij} et si on veut calculer les déplacements, on déduit les déformations ε_{ij} des σ_{ij} par les relations IV.39. Ensuite, par intégration en suivant la méthode indiquée en paragraphe VI.3. (équation 15), on obtient les coordonnées ω_{ij} de la rotation et enfin les u_i par la relation (11')

Remarque 3 : A l'aide de la première méthode, il n'y a pas de conditions de compatibilité puisque les variables sont les déplacements.

Exercice VI.1.- Déterminer la déformation d'une barre prismatique de longueur l placée verticalement dans le champ de pesanteur.



L'axe x_3 est choisi comme indiqué sur la figure, et la base inférieure pour plan x_1, x_2.

Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} = \rho g \qquad F_{vi} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{matrix} \right.$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

tous les σ_{ij} sauf σ_{33} doivent s'annuler sur la surface latérale de la barre et sur la base supérieure (x_3=l) on doit avoir : $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$.

La solution des équations d'équilibre vérifiant ces conditions aux limites est :

$$\sigma_{33} = -\rho g\,(l - x_3) \text{ et les autres } \sigma_{ij} = 0$$

Les équations de compatibilité (19) sont également satisfaites par cette solution : (Beltrami)

$$(1+\nu)\,\Delta\sigma_{33} + \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^{\,2}} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^{\,2}} = 0 \qquad \Delta\sigma_{33} = 0$$

On détermine les ε_{ij} en fonction des σ_{ij} à l'aide des équations IV.39 :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \frac{\nu}{E}\, g\,(l - x_3) \qquad (1)$$

$$(2) \qquad \varepsilon_{33} = -\frac{\rho g\,(l - x_3)}{E} \qquad\qquad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{12} = 0 \qquad (3)$$

En intégrant ces équations, on détermine les composantes du vecteur déformation:

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad \text{soit} \quad u_3 = -\frac{\rho g}{E}\left(l\, x_3 - \frac{x_3^{\,2}}{2}\right) + \mu^\circ_3 \qquad (4)$$

u_3° étant une fonction de x_1 et x_2, que nous déterminerons. En portant la valeur de u_3 dans les équations (1) et (3) :

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^\circ}{\partial x_1} = 0$$

$$\text{soit :} \quad u_1 = -\frac{\partial u_3^\circ}{\partial x_1} x_3 + u_1^\circ \qquad (5)$$

$$\varepsilon_{23} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^\circ}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{soit} \quad u_2 = -\frac{\partial u_3^\circ}{\partial x_2} x_3 + u_2^\circ$$

u°_1 et u°_2 étant des fonctions des deux variables x_1 et x_2.

En portant les valeurs (5) dans les équations (1) il vient :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial^2 u_3^\circ}{\partial x_1^2} x_3 + \frac{\partial u_1^\circ}{\partial x_1} = \frac{\nu}{E}\rho g\,(1-x_3)$$

$$\varepsilon_{22} \rightarrow -\frac{\partial^2 u^\circ_3}{\partial x_2^2} x_3 + \frac{\partial u^\circ_2}{\partial x_2} = \frac{\nu}{E}\rho g\,(1-x_3) \qquad (6)$$

Puisque u°_1 et u°_2 ne dépendent pas de x_3; les équations (6) ne seront satisfaites que si :

$$\frac{\partial u^\circ_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2^\circ}{\partial x_2} = \frac{\nu}{E}\rho g l \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 u^\circ_3}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 u^\circ_3}{\partial x_2^2} = +\frac{\nu}{E}\rho g \qquad (7)$$

En portant (5) dans (3) : $\varepsilon_{12} = 0$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \qquad -2x_3 \frac{\partial u_3^\circ}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial u_1^\circ}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^\circ}{\partial x_1} = 0$$

u_1° et u°_2 ne dépendent pas de x_3, on doit avoir :

$$\frac{\partial^2 u_3^\circ}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial u_1^\circ}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^\circ}{\partial x_1} = 0 \qquad (8)$$

A partir des équations (7) et (8), on peut obtenir les expressions générales de u°_1, u°_2, u°_3.

Ces équations sont satisfaites si on prend :

$$u^\circ_1 = a\, x_2 + b\, x_1 + a_1$$

$$u^\circ_2 = -\, a\, x_1 + b' x_2 + b_1 \qquad b' = b \quad \text{car} \quad \frac{\partial u^\circ_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u^\circ_2}{\partial x_2} = \frac{\nu}{E}\, \rho g l$$

$$u^\circ_3 = \frac{\nu \rho g}{2E}\,(x_1^2 + x_2^2) + c\, x_1 + d x_2 + e$$

a, a_1, b_1, c, d, e = constantes arbitraires.

Ainsi (4) et (5) permettent d'obtenir u_1, u_2, u_3

$$u_1 = -\, \frac{\nu \rho g}{E}\, x_1 x_3 - c x_3 + a x_2 + b x_1 + a_1$$

$$u_2 = -\, \frac{\nu \rho g}{E}\, x_2 x_3 - d x_3 - a x_1 + b' x_2 + b_1 \qquad (9)$$

$$u_3 = -\, \frac{\rho g}{E}\left(l x_3 - \frac{x_3^2}{2}\right) + \frac{\nu \rho g}{2E}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + c x_1 + d x_2 + e$$

On détermine les 6 constantes arbitraires d'après les conditions d'appui de la pièce ou de fixation (on suppose que la face inférieure repose sur un plan).

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0 \quad \text{pour} \quad x_1 = 0,\; x_2 = 0,\; x_3 = 0 \quad \text{(point A)}$$

On n'a pas de rotation de la barre autour d'axes passant par A (centre gravité face inférieure) et parallèles à x_1 et x_2 :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0$$

Pas de rotation autour de x_3 : $\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0$ au point A

En utilisant les équations (9); les 6 conditions ci-dessus au point A deviennent

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} u_1 = 0 & + a_1 = 0 ; & u_2 = 0 & + b_1 = 0 ; & u_3 = 0 & + e = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0 & . - c = 0 ; & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0 & -d = 0 ; & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 & -a = 0 \end{matrix}$$

mais $$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11} = \frac{\nu}{E} \rho g \, (1 - x_3)$$

$$= - \frac{\nu \rho g}{E} x_3 + b \quad \text{soit } b = \frac{\nu}{E} \rho g l$$

de même b' = b

Soit finalement :

$$u_1 = + \frac{\nu \rho g}{E} x_1 \, (1 - x_3)$$

$$u_2 = + \frac{\nu \rho g}{E} x_2 \, (1 - x_3)$$

$$u_3 = - \frac{\rho g}{E} l x_3 + \frac{\rho g x_3^2}{2E} + \frac{\nu \rho g}{2E} (x_1^2 + x_2^2)$$

$$u_3 = + \frac{\rho g}{2E} \left[(l - x_3)^2 - l^2 + \nu (x_1^2 + x_2^2) \right]$$

Les points situés sur l'axe des x_3 n'ont qu'un déplacement vertical :

$$x_1 = x_2 = 0 \qquad u_1 = 0 \quad u_2 = 0 \qquad u_3 \neq 0$$

Les autres points de la barre, en raison de la contraction latérale subissent non seulement un déplacement vertical mais aussi un déplacement horizontal. Les lignes qui avant déformation sont parallèles à l'axe x_3 deviennent inclinées par rapport à l'axe x_3. Les sections transversales perpendiculaires à l'axe x_3 deviennent après déformation des surfaces de paraboloïdes:

$x_3 = c$. Après déformation :

$$x_3 = c + u_3 = c + \frac{\rho g}{2E} c^2 - \frac{\rho g l c}{E} + \frac{\nu \rho g}{2E} (x_1^2 + x_2^2)$$

CHAPITRE VIII

METHODES EXPERIMENTALES D'ANALYSE DES CONTRAINTES

On peut, à partir des équations de la théorie de l'élasticité, pour des solides de forme géométrique simple et soumis à des sollicitations simples, trouver une solution analytique du problème permettant le calcul des contraintes et déformations. Mais, en pratique, les formes et les sollicitations sont si complexes qu'il est alors très difficile voire impossible de trouver une solution analytique rigoureuse. Dans ces conditions, on est d'abord amené à faire des hypothèses simplificatrices dont la validité n'est pas toujours certaine et ensuite à tenir compte des approximations faites en multipliant les dimensions calculées par un coefficient de sécurité empirique.

Cette méthode est couteuse (elle entraîne un gaspillage de matière) et de plus peut être dangereuse car elle n'améliore pas le taux de localisation des contraintes.

La seule solution est la détermination des contraintes en tous points et de la forme optimale de la pièce permettant de réduire au mieux les maxima de contrainte.

On peut arriver à ce résultat en ayant recours soit à des méthodes de calcul numérique soit à des méthodes expérimentales telles que la mesure des déformations superficielles par des extensomètres ou des jauges extensométriques, la méthode photoélasticimétrique ou encore la méthode analytique.

Les avantages des méthodes expérimentales sont multiples :

- détermination rapide des contraintes en tous points
- obtention de la forme optimale de la pièce
- prise en compte des conditions de liaison (systèmes hyperstatiques par exemple)
- intérêt pédagogique par la visualisation de la répartition des contraintes.

VIII.1. - Extensométrie

VIII.1.1. - Principes généraux

L'extensométrie correspond à la mesure directe des déformations : elle n'est possible que sur le contour du solide, ce qui limite ses possibilités. A partir des déformations, on peut remonter aux contraintes (au moins dans la zone d'élasticité linéaire).

La détermination expérimentale de $[\varepsilon]$ peut se faire de deux manières :

1 - par des mesures des déplacements u_i : on en déduit alors ε_{ij} : $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

On utilise les techniques des grilles ou des moirés.

2 - par des mesures des dilatations linéaires unitaires (ε_{11}, ε_{22} et ε_{33}) et des distorsions ($2\varepsilon_{12}$, $2\varepsilon_{13}$, $2\varepsilon_{23}$)

Les dilatations $\Delta l/l_o$ se mesurent par des extensomètres.

Il n'existe pas d'appareils courants permettant de mesurer les distorsions (d'où le nom donné à la méthode). Mais on peut les déterminer en mesurant les dilatations dans plusieurs directions autour d'un point (fig. 1).

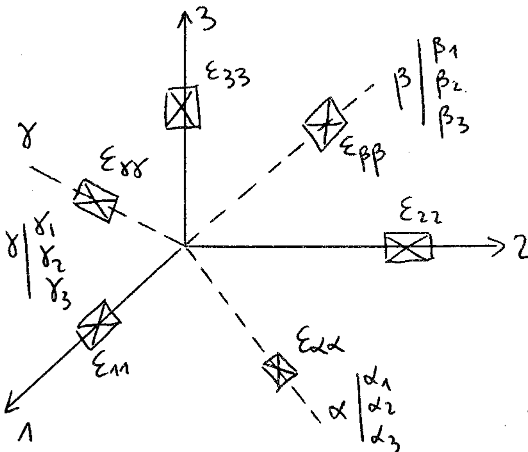


Figure 1

On a (cf. § IV 2.3 relation 12)

(1)
$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \varepsilon_{11}\alpha_1^2 + \varepsilon_{22}\alpha_2^2 + \varepsilon_{33}\alpha_3^2 + 2\varepsilon_{12}\alpha_1\alpha_2 + 2\varepsilon_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2\varepsilon_{13}\alpha_1\alpha_3$$
$$\varepsilon_{\beta\beta} = \varepsilon_{11}\beta_1^2 + \varepsilon_{22}\beta_2^2 + \varepsilon_{33}\beta_3^2 + 2\varepsilon_{12}\beta_1\beta_2 + 2\varepsilon_{23}\beta_2\beta_3 + 2\varepsilon_{13}\beta_1\beta_3$$
$$\varepsilon_{\gamma\gamma} = \varepsilon_{11}\gamma_1^2 + \varepsilon_{22}\gamma_2^2 + \varepsilon_{33}\gamma_3^2 + 2\varepsilon_{12}\gamma_1\gamma_2 + 2\varepsilon_{23}\gamma_2\gamma_3 + 2\varepsilon_{13}\gamma_1\gamma_3$$

C'est un système de 3 équations à 3 inconnues : $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}$; $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ et ε_{33} étant déterminées directement.
La résolution de ce système permet de déterminer indirectement les distorsions.
Les extensomètres doivent avoir une bonne sensibilité et être aussi réduits que possible. En effet, dans le domaine élastique, les déformations sont toujours petites ; pour une tension de 20 kgf/mm^2, une éprouvette d'acier (E = 20.000 kgf/mm^2) se déforme de 10^{-3}.
Si on dispose d'un extensomètre de longueur de mesure (ou de base) de 2 mm, l'allongement total sera de 2µ . Ainsi si l'on veut une précision du 1%, il faudra pouvoir mesurer le 2/100µ . De plus, la base doit être aussi réduite que possible, si on veut mesurer avec précision, l'état de déformation en un point.

VIII.1.2. - <u>Divers types d'extensomètres</u>

1 - <u>Extensomètres mécaniques</u> : solution la plus simple et la plus ancienne (fig. 2)

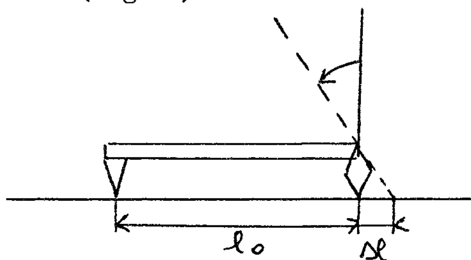


Figure 2

La sensibilité de ce genre de dispositif est assez faible. On peut l'accroître mécaniquement par l'utilisation de leviers amplificateurs ou optiquement en utilisant la méthode de Poggendorff.
Les extensomètres mécaniques ne sont pratiquement plus utilisées dans l'analyse des contraintes car ils sont peu pratiques d'emploi et leur base est relativement importante.

2 - Extensomètres optiques : (fig. 3)

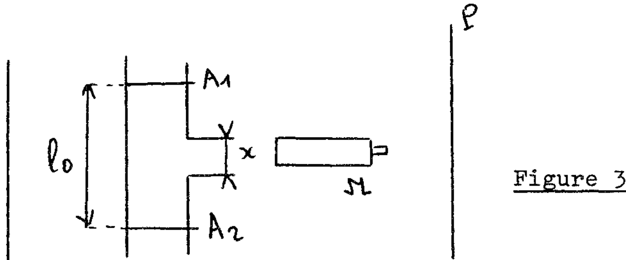


Figure 3

Si on peut disposer d'une base de 2 cm (cas d'une traction pure), on utilise le dispositif décrit sur la figure 3. Deux aiguilles fines A_1 et A_2 sont solidaires des extrémités de la base de mesure.
Si ε est la dilatation uniforme, l'écartement des aiguilles est égal à $\Delta l = l_0 \varepsilon$.
Un objectif de microscope M permet de former l'image agrandie sur une plaque P, qui, développée, peut être projetée avec un fort grossissement.

3 - Extensomètres pneumatiques : on utilise le principe de l'amplificateur pneumatique Solex (fig. 4)
Soient deux orifices E et S placés en série et alimentés par un courant d'air comprimé. On maintient en avant une pression P constante.
La pression P entre les deux orifices dépend uniquement du rapport des deux sections des orifices E et S.

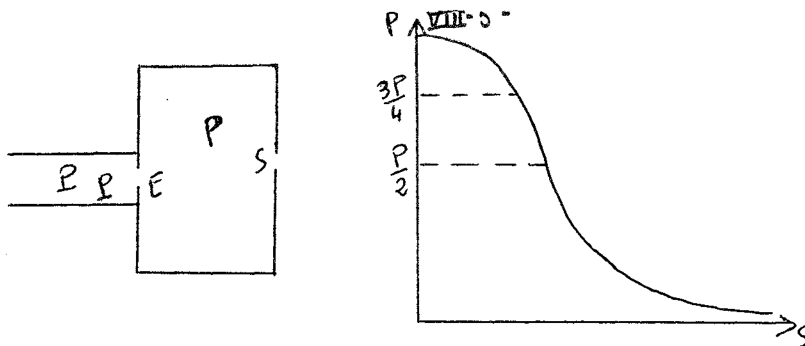


Figure 4

Si l'orifice S débite dans l'atmosphère et si P et p sont les pressions relatives (mesurées par rapport à la pression atmosphérique), on peut écrire l'égalité des débits en appliquant le théorème de Torricelli (cf. cours mécanique des fluides):

$$C_q E \sqrt{\frac{2(P-p)}{\rho}} = C_q S \sqrt{\frac{2p}{\rho}}$$

C_q étant le coefficient de débit de l'orifice (0,6) on a donc :

$$E^2(P-p) = S^2 p$$

soit

$$p = P \frac{1}{1+ \frac{S^2}{E^2}} \qquad (2)$$

La variation de p avec la surface S est indiquée par la fig. 4.
Si on se limite au domaine $\frac{P}{2} < p < \frac{3P}{4}$, ou une bonne linéarité de l'appareil.
En pratique, la variation de S est liée à l'allongement de la base de mesure par un dispositif approprié. La sensibilité de ces dispositifs est excellente (on peut atteindre une amplification de l'ordre de 200.000) et une longueur de base de l'ordre de 2 mm.

4 - Extensomètres électriques

On transforme la déformation à mesurer en une grandeur électrique. Cette méthode présente beaucoup d'avantages :

- la sensibilité peut être considérable, l'amplification étant facile
- l'absence complète d'inertie permet son utilisation même pour des phénomènes rapides.

On peut donc utiliser les extensomètres électriques pour étudier des sollicitations périodiques.

La détection peut se faire par :

- variation de capacité
- variation de self ou de l'induction mutuelle
- variation de résistance.

Les extensomètres à variation de résistance très faciles d'emploi sont de nos jours de plus en plus utilisés. Nous allons les étudier plus en détail dans le paragraphe suivant.

VIII.1.3. - Jauges de contraintes

Le principe de base est la variation de la résistance électrique d'un fil lorsqu'il est soumis à une contrainte. Le conducteur est formé par un fil métallique fin (de quelques 1/100mm) bobiné sous forme de quelques brins parallèles. Cet ensemble est collé directement sur la pièce à étudier (fig. 5). La variation de résistance est due à la variation des dimensions du fil et aussi à la variation de la résistivité avec la contrainte. Les jauges fonctionnent aussi bien en tension qu'en compression suivant l'axe du bobinage mais ont une sensibilité très réduite par rapport aux efforts transversaux.

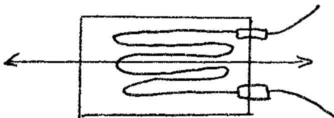


Figure 5

Leur longueur active peut varier entre 24 et 2,5 mm. La résistance R est égale à :

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

$$\frac{\Delta R}{R_o} = \frac{\Delta \rho}{\rho_o} + \frac{\Delta l}{\rho_o} - \frac{2\Delta d}{d_o}$$

or $$\frac{\Delta \rho}{\rho o} = C \frac{\Delta V}{V_o}$$ (relation de Bridgman)

C = constante = 1,13 pour le constantan (cuivre-nickel)

$$\frac{\Delta V}{V_o} = \frac{2\Delta d}{d_o} + \frac{\Delta l}{l_o} \quad \text{car} \quad V = \frac{\pi d^2}{4}\ l$$

Donc $$\frac{\Delta R}{R_o} = C\left(\frac{\Delta l}{l_o} + \frac{2\Delta d}{d_o}\right) + \frac{\Delta l}{l_o} - \frac{2\Delta d}{d_o}$$

or $$\nu = \frac{-\frac{\Delta d}{d_o}}{\frac{\Delta l}{l_o}} \qquad \frac{\Delta d}{d_o} = -\nu \frac{\Delta l}{l_o}$$

soit $$\frac{\Delta R}{R_o} = \left[C\ (1-2\nu) + 1 + 2\nu\right] \frac{\Delta l}{l_o} \qquad (3)$$

$$\boxed{\frac{\Delta R}{R_o} = k\varepsilon} \qquad (3)$$

avec k = 1,13(1-0,6) + 1 + 0,6 = 2,052 $\simeq$ 2 pour le constantan

k étant le coefficient de jauge ou facteur de jauge (k est voisin de 2). Ce coefficient k est très stable tant que $\Delta l/l_o$ ne dépasse pas 0,5%. Les jauges sont sensibles aux variations de température. Toutefois, on peut y remédier en utilisant des fils à faible variation de résistivité avec la température.

On peut aussi utiliser une jauge de compensation thermique non soumise à l'effort mais subissant les mêmes variations de température. Les deux résistances sont branchées en opposition dans le pont de mesure. On peut ainsi obtenir des précisions absolues de 10^{-6} en $\Delta R/R_o$. Une jauge pouvant supporter au maximum 5.10^{-3}, on peut obtenir des précisions relatives meilleures que 1%. La mesure de la variation de résistance se fait par le montage en pont de Weathstone. Pour les mesures statiques (phénomènes à variation lente), le pont est alimenté en continu et la mesure se fait à l'aide d'un galvanomètre.

Pour les mesures dynamiques (phénomène à variation rapide), on peut soit alimenter le pont en continu et utiliser un amplificateur à courant continu couvrant la gamme de fréquence 0÷ fréquence nécessaire f soit alimenter le pont par un courant porteur de fréquence F et utiliser un amplificateur de bande passante F-f, F+f.
Différents types de ponts peuvent être utilisés. Il faut au minimum deux jauges : l'une J_1 est la jauge active, l'autre J_2 est la jauge de compensation thermique.
On mesure alors :

$$\left(\frac{\Delta R}{R_o}\right)_{J_1} - \left(\frac{\Delta R}{R_o}\right)_{J_2}$$

Mesure des contraintes à la surface d'un corps (fig. 6)

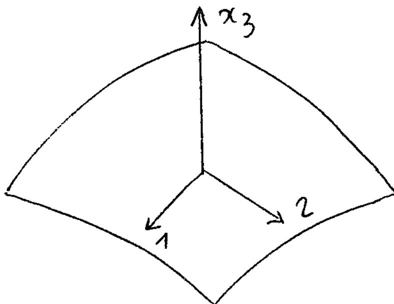


Figure 6

Si la surface est libre ou soumise à une pression, la normale X_3 à la surface est direction principale des contraintes. Les directions principales des contraintes sont identiques aux directions principales des déformations.

On a donc :

$$\left[\varepsilon_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

On connait en général σ_3($\sigma_3 = 0$ ou $\sigma_3 = -p$). Il est suffisant pour connaitre l'état de contrainte de mesurer ε_{11},ε_{22} et ε_{12} et d'appliquer la loi de Hooke.

Dans une direction α du plan x_1x_2 (fig. 7), la dilatation linéaire est égale à (cf. relation VIII.1).

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \varepsilon_{11}\cos^2\alpha + \varepsilon_{22}\sin^2\alpha + 2\varepsilon_{12}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$(4) \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2}\cos 2\alpha + \varepsilon_{12}\sin 2\alpha$$

Figure 7

De la mesure de ε_{11},ε_{22} et $\varepsilon_{\alpha\alpha}$, on tire donc ε_{12} à l'aide de la relation précédente.

Exemples :

1/ Rosette à 45° : l'angle α est égal à 45°. On mesure $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ et $\varepsilon_{\alpha\alpha}$

* algébriquement :

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{\alpha\alpha} - \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} \qquad (4)$$

et

$$\mathrm{tg}\,2\varphi = \frac{2\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}} \qquad (5)$$

$\cos 2\varphi$ étant du signe de $\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}$ (cf. § IV.2.3.4)

soit

$$\mathrm{tg}\,2\varphi = \frac{2\varepsilon_{\alpha\alpha} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}} \qquad (6)$$

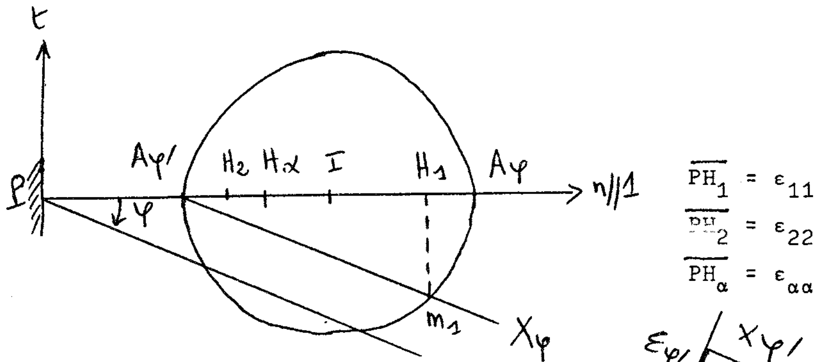
Les valeurs principales des déformations sont égales à :

$$\varepsilon_{\varphi,\varphi'} = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2+4\varepsilon_{12}^2} = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2 + (2\varepsilon_{\alpha\alpha} - \varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2}$$

$$\varepsilon_{\varphi,\varphi'} = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\varepsilon_{\alpha\alpha}^2 - 2\varepsilon_{\alpha\alpha}\varepsilon_{11} - 2\varepsilon_{\alpha\alpha}\varepsilon_{22}}$$

$$\varepsilon_{\varphi,\varphi'} = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\varepsilon_{\alpha\alpha}-\varepsilon_{11})^2 + (\varepsilon_{\alpha\alpha}-\varepsilon_{11})^2} \qquad (7)$$

* graphiquement (fig. 8) : $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{\alpha\alpha} - \dfrac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2}$



$\overline{PH_1} = \varepsilon_{11}$

$\overline{PH_2} = \varepsilon_{22}$

$\overline{PH_\alpha} = \varepsilon_{\alpha\alpha}$

εφ'
Xφ'
1
1
εφ
Xφ

Figure 8

I centre du cercle est le milieu de H_1H_2

$\varepsilon_{12} = \overline{H_1m_1} = \overline{PH_\alpha} - \overline{PI} = \overline{IH_\alpha}$

2/ Rosette à 120° (fig; 9)

* algébriquement

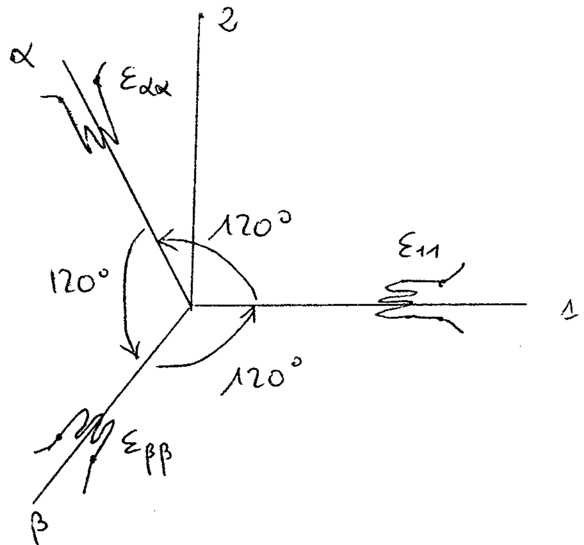


Figure 9

On a relation (1) :

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\alpha} = \dfrac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} - \dfrac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{4} - \varepsilon_{12}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \varepsilon_{\beta\beta} = \dfrac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} - \dfrac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{4} + \varepsilon_{12}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta} = \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22} - \frac{\varepsilon_{11}}{2} + \frac{\varepsilon_{22}}{2}$$

d'où

$$\varepsilon_{22} = \frac{2(\varepsilon_{\alpha\alpha}+\varepsilon_{\beta\beta}) - \varepsilon_{11}}{3} \qquad (8)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_{\beta\beta} - \varepsilon_{\alpha\alpha}}{\sqrt{3}} \qquad (9)$$

Eléments principaux :

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2(\varepsilon_{\beta\beta} - \varepsilon_{\alpha\alpha})}{\sqrt{3}\left[\varepsilon_{11} - \dfrac{2(\varepsilon_{\alpha\alpha}+\varepsilon_{\beta\beta})-\varepsilon_{11}}{3}\right]}$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sqrt{3}\,(\varepsilon_{\beta\beta} - \varepsilon_{\alpha\alpha})}{2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{\alpha\alpha} - \varepsilon_{\beta\beta}} \qquad (10)$$

$$\varepsilon_{\varphi,\varphi'} = \frac{3\varepsilon_{11}+2(\varepsilon_{\alpha\alpha}+\varepsilon_{\beta\beta})-\varepsilon_{11}}{6} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3\varepsilon_{11}-2\varepsilon_{\alpha\alpha}-2\varepsilon_{\beta\beta}+\varepsilon_{11}}{3}\right)^2 + \frac{4(\varepsilon_{\beta\beta}-\varepsilon_{\alpha\alpha})^2}{3}}$$

$$\varepsilon_{\varphi,\varphi'} = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{\alpha\alpha}+\varepsilon_{\beta\beta}}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{\alpha\alpha})^2+(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{\beta\beta})^2+(\varepsilon_{\beta\beta}-\varepsilon_{\alpha\alpha})^2}$$

* graphiquement (fig. 10)

Figure 10

$$\overline{PI} = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta}}{3}$$

soit $\overline{PI} = \dfrac{\overline{PH_1}+\overline{PH_\alpha} + \overline{PH_\beta}}{3}$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_{\beta\beta} - \varepsilon_{\alpha\alpha}}{3} = \overline{H_\alpha H_\beta} \ \mathrm{tg}\ 30°$$

Calcul des contraintes : on applique les relations de Lamé (V.3.8)

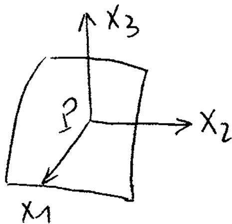
$$\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{32} = 0$$

On a
$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}\right] \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}\right] \\ \varepsilon_{33} = \dfrac{-\nu}{E}\left[\sigma_{11} + \sigma_{22}\right] \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \end{cases} \qquad (12)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_{11} = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) \\ \sigma_{22} = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}) \\ \sigma_{12} = \dfrac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12} \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \varepsilon_{33} = 0 \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \\ \varepsilon_{33} = -\dfrac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) \end{array} \qquad (12)$$

Si les directions 1 et 2 sont les directions principales, on a ($\sigma_3 = 0$)



$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\sigma_2\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu\sigma_1\right]$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}\left[\sigma_1 + \sigma_2\right]$$

soit

$\sigma_1 = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2)$
$\sigma_2 = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1)$
$\sigma_3 = -\dfrac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2)$

(13)

Il suffit donc de déterminer ε_1 et ε_2 pour connaître l'état de contrainte et l'état de déformation en P.
Pour des directions quelconques de la surface, il suffit de connaître ε_{11}, ε_{22} et ε_{12} qu'on mesure par la méthode des rosettes.

VIII.2 - PHOTOELASTICITE

VIII.2.1. - RAPPELS : BIREFRINGENCE - MILIEUX OPTIQUEMENT ANISOTROPES

Un faisceau de lumière naturelle peut être considéré comme consistant en vibrations se produisant dans toutes les directions transversales à la direction du rayon. Il revient au même de dire qu'un faisceau de lumière naturelle transporte deux vibrations transversales rectangulaires incohérentes de même intensité.

Un faisceau de lumière polarisée est constitué par des vibrations transversales dans une direction privilégiée. Le plan contenant cette direction et le rayon lumineux s'appelle plan de polarisation.
Une lumière partiellement polarisée peut être considérée comme transportant deux vibrations rectangulaires incohérentes d'inégale intensité (si l'une de ces vibrations a une intensité nulle, elle est totalement polarisée). On peut obtenir un faisceau de lumière polarisée par réflexion sur une plaque de verre recouverte de peinture noire sur l'une de ses faces mais en fait on utilise rarement la réflexion pour polariser un pinceau lumineux. On fait appel au phénomène de biréfringence qui apparait dans certains cristaux (le plus utilisé est la calcite rhomboédrique CO_3Ca : rhomboèdres de spath d'Islande). Si on envoie un pinceau normal sur une lame de spath obtenue par clivage (fig. 11), on obtient une double réfraction : en effet à la sortie il y a deux faisceaux réfractés, l'un O est le faisceau ordinaire : c'est la prolongation du faisceau incident, l'autre E est le faisceau extraordinaire : il est dévié par rapport au faisceau incident.Si la lame tourne suivant un axe perpendiculaire à son plan, le faisceau O reste fixe alors que le faisceau E décrit un cylindre autour de O.

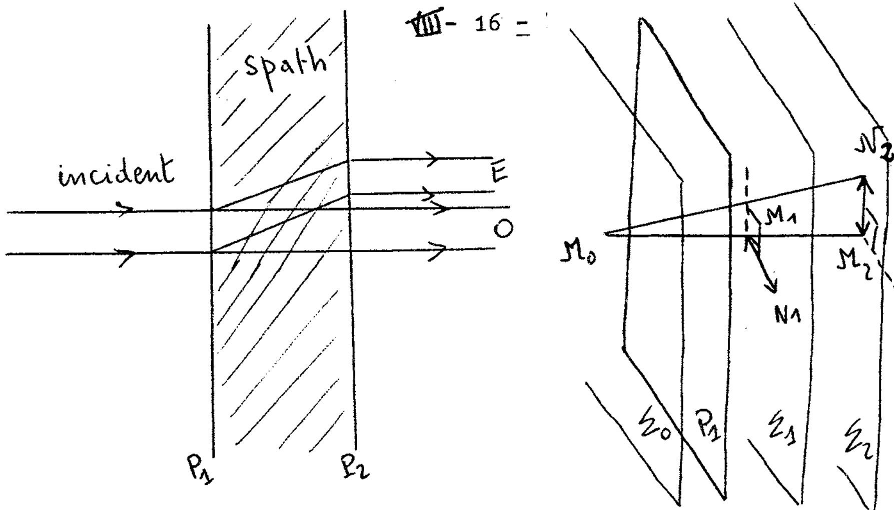


Figure 11

De plus ces deux faisceaux sont polarisés à angle droit. Ce phénomène de biréfringence est dû au fait que la calcite est anisotrope du point de vue optique.En effet de par leur structure les cristaux sont anisotropes mais certains se comportent comme isotropes du point de vue optique.

Pour tout cristal, on peut définir l'ellipsoïde des indices.

A partir d'une origine quelconque, on porte l'indice sur une droite parallèle à la direction de la vibration lumineuse : l'indicatrice obtenue est un ellipsoïde appelé ellipsoïde des indices d'équation:

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1$$

n_1, n_2 et n_3 étant les indices principaux du cristal. Connaissant l'ellipsoïde des indices, on peut déterminer les directions et les vitesses normales des vibrations rectilignes qui correspondent aux deux ondes Σ_1 et Σ_2, correspondant aux deux faisceaux réfractés.

En effet dire qu'il y a double réfraction revient à dire qu'une onde plane Σ_o tombant parallèlement aux faces P_1 et P_2 d'une lame cristalline (fig. 11) se dédouble à l'intérieur de la lame en deux ondes Σ_1 et Σ_2 transportant, avec des vitesses normales différentes, deux vibrations rectangulaires privilégiées dirigées suivant Ox et Oy (M_1N_1 et M_2N_2). Ox et Oy sont appelées les <u>lignes neutres</u> de la lame et sont les axes de la section de l'ellipsoïde des indices par un plan parallèle à Σ_o et passant par le centre O de l'ellipsoïde (fig. 12).

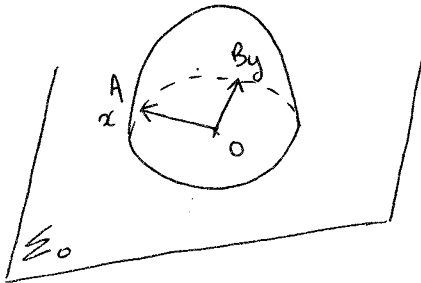


Figure 12

Les directions de propagation effective des deux ondes (M_oM_1 et M_oN_2) peuvent être déterminées à partir de la surface d'onde (cf. cours d'optique). Le rayon extraordinaire MoN_2 n'est pas normal à l'onde Σ_2. Les vitesses de propagation des deux vibrations sont différentes, les indices qui leur correspondent n_x et n_y étant différents. n_x et n_y sont représentés par les longueurs des demi-axes de l'ellipse OA et OB (fig. 12) :

$$n_x = \frac{C}{V_x} \qquad n_y = \frac{C}{V_y} \qquad (14)$$

C = vitesse de la lumière dans le vide

V_x et V_y vitesse normale des 2 ondes Σ_1 et Σ_2 :

$$V_x = \frac{\overrightarrow{M_oM_1}}{\Delta t} \qquad V_y = \frac{\overrightarrow{M_oM_2}}{\Delta t}$$

La traversée de la lame représente pour les deux rayons ordinaires et extraordinaires des chemins optiques $n_x e$ et $n_y e$ différents. Il en résulte donc une différence de marche $\delta = (n_x - n_y)e$ entre les deux vibrations introduites par la traversée de la lame.

Différentes formes de l'ellipsoïde des indices :

- pour certains cristaux c'est une sphère : ces cristaux sont alors isotropes du point de vue optique. Il n'y a pas de biréfringence. C'est le cas des cristaux cubiques ou des verres.
- pour d'autres, l'ellipsoïde des indices présente un axe de symétrie (cristaux hexagonaux) : c'est le cas des cristaux dits uniaxes. L'ellipsoïde est soit allongée soit aplatie dans la direction de l'axe de symétrie (fig. 13).

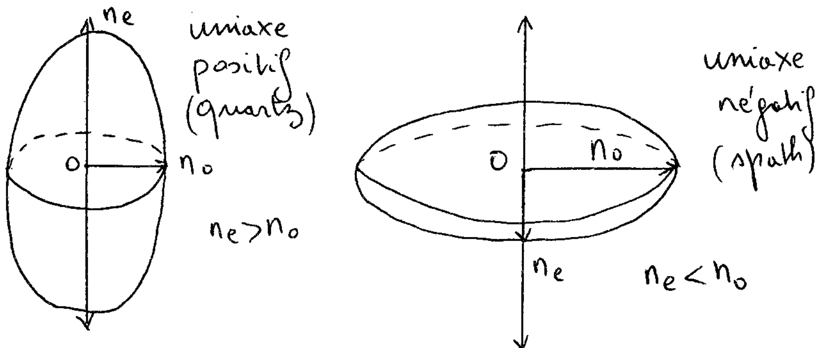


Figure 13

On voit que pour un faisceau parallèle à l'axe de symétrie de l'ellipsoïde (plan d'onde est perpendiculaire), le milieu n'a qu'un indice n_o appelé indice ordinaire (les ondes $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont alors confondues). Cet axe est appelé axe optique du milieu anisotrope. n_e est appelé indice extraordinaire.

- dans le cas où les 3 indices principaux sont différents (cristaux tetragonaux, monochimiques, orthorhombiques), on peut montrer que l'ellipsoïde a deux sections cycliques. Suivant la normale à ces deux sections, le milieu n'a qu'un indice (les ondes Σ_1 et Σ_2 sont confondues). Ces deux directions sont les axes optiques du cristal qu'on dit biaxe.

Remarque : Un milieu optiquement isotrope peut être rendu anisotrope par des influences extérieures : par exemple les verres et les polymères peuvent devenir biréfringents quand ils sont soumis à un champ de contraintes, de même les liquides soumis à un champ électrique ou magnétique.

Production de lumière polarisée

On peut donc disposer de lumière polarisée en utilisant l'un ou l'autre des faisceaux ordinaire et extraordinaire réfractés par un cristal biréfringent.

- Nicol : on élimine l'un des faisceaux (ordinaire) en accolant deux moitiés de prismes de spath avec un ciment convenable (balsam de Canada). Le ciment a un indice de réfraction tel que le faisceau ordinaire est totalement réfléchi et le faisceau extraordinaire transmis. On réalise ainsi un polariseur appelé prisme de Nicol ou Nicol.

- Certains cristaux biréfringents (ex : tourmaline) sont inégalement transparents pour le rayon ordinaire et extraordinaire. Ce phénomène est connu sous le nom de dichroïsme. Dans la tourmaline c'est le rayon ordinaire qui s'affaiblit le plus vite : pour une épaisseur qui l'éteint complètement, on dispose à la sortie uniquement du rayon extraordinaire polarisé. Commercialement, on réalise avec de petits cristaux des lames minces vendues sous le nom de polaroïdes, qui sont moins parfaites que les nicols.

VIII.2.2. PRINCIPE DE L'ANALYSE DES CONTRAINTES PAR PHOTOELASTICITE

1 - Généralités

La méthode d'analyse des contraintes par photoélasticité consiste à examiner en lumière polarisée un modèle de la pièce à étudier, le matériau constituant le modèle étant transparent et possèdant certaines propriétés optiques spéciales. Le modèle étant soumis à un système de charges similaires à celui de la pièce à étudier, on peut déterminer l'amplitude et la direction des contraintes principales en tous ses points, ce qui permet d'en déduire les contraintes qui prendront naissance dans l'organe lui-même par application des lois de similitude. Si le modèle est réalisé à une échelle L et si les efforts appliqués sont eux-mêmes réduits à l'échelle M, les contraintes dans la pièce sont liées à celles du modèle par la relation :

$$\sigma_{pièce} = \sigma_{modèle} \frac{M}{L^2} \qquad (15)$$

Cette relation n'est valable que si les moments d'inertie (qui varient en L^4) n'interviennent pas. La méthode photoélastique s'applique essentiellement aux problèmes plans mais récemment des efforts ont été tentés en vue d'étendre cette méthode aux problèmes tridimensionnels.

2 - Biréfringence par déformation

Un solide transparent isotrope devient anisotrope s'il est soumis à des efforts extérieurs (Brewster 1816). Considérons un cube de verre dont les arêtes sont parallèles aux axes Ox, Oy, Oz (fig. 14). Soumettons le à une compression suivant l'axe Ox ; il devient biréfringent : il se transforme en cristal uniaxe dont l'axe optique coincide avec la direction de l'effort.

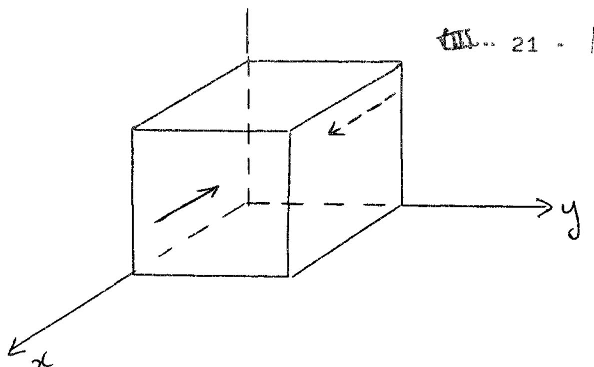


Figure 14

Ainsi un faisceau de lumière polarisée se propageant dans la direction Oz est dédoublé en un rayon ordinaire vibrant suivant Oy et se propageant avec l'indice $n_y = n_o$ et un rayon extraordinaire vibrant suivant Ox et correspondant à l'indice $n_x = n_e$. Il s'agit ici des indices principaux, le plan d'onde étant parallèle à xOy et Ox étant l'axe optique (cf. § VIII.2.1 fig. 12 et 13).
Si le faisceau traverse une épaisseur e, les deux rayons ont à la sortie du verre une différence de marche :

$$\delta = (n_e - n_o)e$$

avec $n_e - n_o > 0$ cristal uniaxe positif pour une tension
$n_e - n_o < 0$ " négatif pour une compression

Neumann et Maxwell ont donné les lois qui régissent la biréfringence par déformation, Neumann les exprimant en fonction de la déformation, Maxwell en fonction des contraintes. Les résultats coincident pour un solide élastique mais il n'en est plus de même dans le domaine non-élastique (il est probable que ce sont les déformations qui déterminent la biréfringence).

* D'après Maxwell, l'ellipsoïde des indices a les mêmes axes principaux que l'ellipsoïde de Lamé (conséquence du principe de Curie : la symétrie de la cause se retrouve dans l'effet). Si un faisceau polarisé est dirigé suivant l'axe principal σ_3, on obtient à la sortie deux faisceaux polarisés suivant σ_1 et σ_2 correspondant aux indices principaux n_1 et n_2 et on a les relations :

$$\begin{cases} n_1 - n = C_1\sigma_1 + C_2(\sigma_2+\sigma_3) \\ n_2 - n = C_1\sigma_2 + C_2(\sigma_1+\sigma_3) \end{cases} \quad (16)$$

n étant l'indice du matériau au repos (isotrope).

Soit $\delta = (n_e - n_o)e = (n_1 - n_2)e = (C_1 - C_2)\, e(\sigma_1 - \sigma_2)$

$$\boxed{\delta = Ce(\sigma_1 - \sigma_2)} \quad (17)$$

C_1 et C_2 étant des constantes photoélastiques absolues.
C étant une constante photoélastique relative.
C a pour dimensions l'inverse d'une contrainte. L'unité C.G.S. étant trop grande, on exprime suivant C en brewster : 1 brewster = 10^{-13} unité C.G.S. Le brewster est la constante photoélastique d'un matériau dans lequel une contrainte uniaxiale (traction ou compression) de 1 daN/cm^2 = 1 bar $\simeq$ 0,01 kgf/mm^2 produit un retard relatif de 1 Å (10^{-8}cm) sur la lumière traversant 1 mm d'épaisseur.
La différence de marche est donc proportionnelle à la différence des contraintes principales et à l'épaisseur traversée.
D'une manière générale, $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$: l'ellipsoïde de Lamé à 3 axes différents et il en est de même pour l'ellipsoïde des indices : le cristal artificiel est alors biaxe (cf. § VIII.2.1).
Si $\sigma_3 = 0$ (problèmes quasi plans), l'ellipsoïde de Lamé dégénère en une ellipse d'axes σ_1, σ_2 mais l'ellipsoïde des indices a toujours 3 axes inégaux : le cristal est biaxe.
Si $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (contrainte uniaxiale), l'ellipsoïde de Lamé se réduit à l'axe σ_1, celui des indices étant alors de révolution autour de σ_1: le cristal est alors uniaxe (cas de la fig. 14).

* D'après Neumann, la différence de marche est égale à :

$$\delta = Ke(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \qquad (18)$$

K = constante photoélastique sans dimension.
Dans le domaine élastique, K est égal à :

$$K = \frac{CE}{1+\nu} \qquad (19)$$

En effet, d'après la relation (17), on a d'après la loi de Hooke.

$$\delta = Ce(\sigma_1 - \sigma_2) = Ce\,\frac{E}{1+\nu}\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = Ke(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

3 - Principe d'un polaroscope plan

La figure 15 représente schématiquement un polaroscope plan. Un faisceau de lumière passe à travers un polariseur P puis à travers le modèle transparent M et à travers un analyseur A pour aboutir sur un écran E où se forment les franges d'interférence.

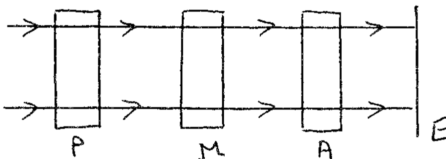


Figure 15

Considérons comme modèle M une plaque d'égale épaisseur constituée par un matériau transparent isotrope (tel que le verre, le celluloïd, le plexiglass, la bakélite etc...) et soumise aux contraintes principales σ_1, σ_2 (fig. 16).

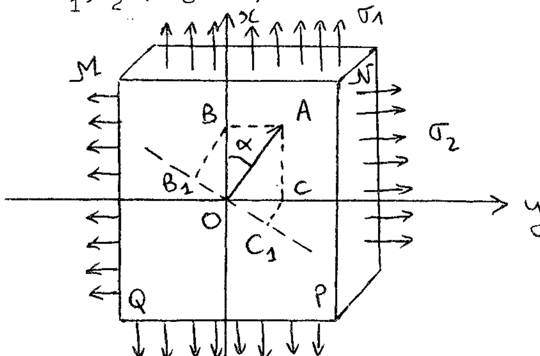


Figure 16

On dirige perpendiculairement à cette plaque le faisceau de lumière polarisée rectilignement suivant OA provenant du polariseur P.
On peut représenter la variation d'amplitude de cette vibration transversale par la relation :

$$s = a \cos \omega t \qquad (20)$$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$ = pulsation de la source monochromatique, N étant la fréquence (T la période) et a l'amplitude maximale $= |\overrightarrow{OA}|$
La vibration simple dans le plan OA peut être décomposée en deux vibrations d'amplitudes

$$\begin{matrix} \overrightarrow{OB} = a \cos \alpha & \text{sur } Ox & x = a \cos\alpha \cos\omega t \\ \overrightarrow{OC} = a \sin \alpha & \text{sur } Oy & y = a \sin\alpha \cos\omega t \end{matrix} \qquad (21)$$

Après traversée du modèle, ces deux rayons polarisés présentent une différence de marche égale à (cf. relation 17).

$$\delta = (n_1 - n_2)\, e = Ce\, (\sigma_1 - \sigma_2)$$

ou une différence de phase $\boxed{\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi Ce}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2)}$

Dans ces conditions, les vibrations après la traversée de la plaque sont données par les relations :

$$x_1 = a \cos\alpha \cos \omega(t - \frac{e}{V_x}) = a \cos\alpha \cos\omega\left(\omega t - \frac{2\pi n_1 e}{\lambda}\right)$$

$$y_1 = a \sin\alpha \cos \omega\,(t - \frac{e}{V_y}) = a \sin\alpha \cos\,(\omega t - \frac{2\pi n_2 e}{\lambda}$$

v_x et v_y étant les vitesses normales des deux ondes dans la plaque:

$$v_x = \frac{C}{n_1} \quad \text{et} \quad v_y = \frac{c}{n_2}$$

Les relations (22) peuvent aussi s'écrire :

$$\begin{cases} x_1 = a \cos\alpha \cos(\omega t' - \varphi) \\ y_1 = a \sin\alpha \cos \omega t' \end{cases} \qquad \text{avec } t' = t - \frac{n_2 e}{C} \qquad (22)$$

Cet ensemble constituant une lumière elliptique que l'analyseur ne peut éteindre. En effet, l'analyseur A ne transmet que les vibrations situées dans son plan de polarisation. Supposons que celui-ci soit <u>perpendiculaire</u> à celui du polariseur (fig. 16) : on dit alors que polariseur et analyseur sont <u>croisés</u> ou que le modèle est placé entre nicols croisés. Si la matière est parfaitement isotrope au repos, aucune lumière ne traverse l'analyseur A et l'écran est sombre. En présence du modèle soumis à des efforts coplanaires, l'analyseur A reçoit les vibrations $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$ données par la relation (22) mais ne transmet que les composantes de ces vibrations dans son plan de polarisation c'est-à-dire :

$$\vec{OB_1} = |\vec{OB}| \sin\alpha = x_1 \sin\alpha = \frac{a}{2} \sin 2\alpha \cos(\omega t' - \varphi)$$

$$\vec{OC_1} = -|\vec{OC}| \cos\alpha = -y_1 \cos\alpha = -\frac{a}{2} \sin 2\alpha \cos \omega t'$$

La vibration résultante dans le plan de polarisation de l'analyseur A est par conséquent :

$$\frac{a}{2} \sin 2\alpha \left[\cos(\omega t' - \varphi) - \cos \omega t'\right] = a \sin 2\alpha \sin\frac{\varphi}{2} \sin\left(\omega t' - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (23)$$

Cette expression montre qu'on a une vibration harmonique simple de pulsation ω et d'amplitude :

$$a \sin 2\alpha \sin\frac{\varphi}{2} \quad (23)$$

L'intensité de la lumière étant elle-même proportionnelle au carré de l'amplitude, on voit donc qu'il arrivera de la lumière sur l'écran si $\sin 2\alpha$ et $\sin\varphi/2$ ne sont pas nuls.

a) <u>Isochromes</u>

Si $\sin\varphi/2 = 0$ c'est-à-dire si $\varphi = 2n\pi = \frac{2\pi C e}{\lambda}(\sigma_1 - \sigma_2)$

n étant un nombre entier, il y aura obscurité : φ est égal à 0 lorsque les contraintes principales sont égales : les points correspondants apparaissent en noir ; ils sont appelés points isotropes. Les points pour lesquels n = 1, 2 ... forment des lignes sombres ou franges pour lesquelles la différence des contraintes principales est constante. Ces franges s'appellent des <u>isochromes</u> et n est l'ordre de la frange.

C'est aussi le lieu des points d'égal cisaillement maximal. D'une isochrome à sa voisine, la valeur de $\sigma_1 - \sigma_2$ varie d'un nombre constant . Pour en déduire les différences entre les contraintes principales, il est donc nécessaire de connaitre l'ordre des franges et la différence de contraintes correspondant à la frange du 1er ordre ou <u>valeur de frange</u> f définie par :

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{f}{e} = \frac{\lambda}{Ce} \qquad f = \frac{\lambda}{C} \qquad (24)$$

Pour l'ordre n, on : $\boxed{\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{nf}{e}}$ (24)

<u>Remarques</u> :

1/ Si l'on opère en lumière blanche, on obtient un système de franges colorées correspondant aux teintes de Newton. Pour chacune d'elles, se trouvent éteintes toutes les longueurs d'onde pour lesquelles la relation (24) est satisfaite.

2/ La valeur de frange peut être déterminée simplement par traction suivant Ox par exemple ($\sigma_2 = 0$); en effet, si on fait croître σ_1 progressivement, on obtiendra une image sombre de l'ensemble de l'éprouvette (en effet la contrainte étant uniforme, il n'y a pas de frange) toutes les fois que l'équation (24) sera vérifiée et notamment au départ pour $\sigma_1 = 0$. De cette manière, on peut déterminer expérimentalement pour un matériau donné la contrainte correspondant à l'intervalle entre 2 images sombres et consécutives de l'éprouvette.

3/ Dans le cas d'un champ de contraintes non uniforme, on aura un déplacement graduel des franges avec apparition de franges nouvelles lors de l'application progressive de la charge. L'ordre des franges peut être déterminé en observant leur mouvement et en les comptant. La figure 17 montre un tracé de franges obtenu sur une éprouvette soumise à une flexion simple. Suffisamment loin des points d'application de la charge, les franges sont parallèles, ce qui signifie que la distribution des contraintes est la même dans toutes les sections droites verticales.

VIII 26 bis

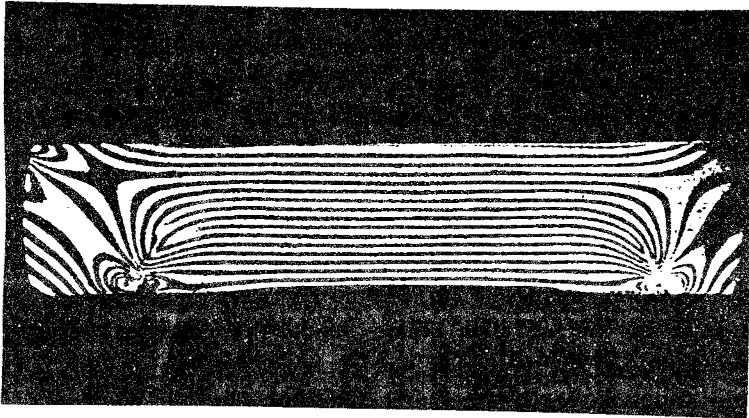


fig 17

En comptant le nombre de franges, on peut obtenir la valeur des contraintes. Lorsque la charge croît, de nouvelles franges apparaissent à la partie supérieure et inférieure de la pièce et se déplacent progressivement vers le plan neutre, les franges devenant de plus en plus serrées. La frange sombre au centre est évidemment immobile : c'est une frange d'ordre zéro (n=0).

4/ Dans le cas des matériaux ductiles, les ruptures surviennent généralement par cisaillement tandis que celles des matériaux fragiles sont au contraire provoquées par les contraintes de traction. Pour les matériaux ductiles, l'examen du réseau d'isochromes indique immédiatement la répartition des contraintes de cisaillement maximal. Les points appartenant aux lignes d'ordre plus élevé seront plus fatigués et c'est en ces points que la rupture s'amorcera.

Dans le cas des matériaux peu ductiles, la connaissance des contraintes principales est nécessaire : on verra ultérieurement les méthodes permettant de les déterminer.

b) Isoclines :

On a vu que l'intensité de la lumière transmise est aussi proportionnelle à $\sin 2\alpha$ (relation 23), α étant l'angle du plan de polarisation avec le plan de l'une des contraintes principales (σ_1).

Lorsque ces 2 plans coïncident, $\sin 2\alpha$ est = 0 et on obtient une tache sombre sur l'écran : dans ce cas, les directions des contraintes principales sont parallèles aux 2 directions des plans de polarisation du polariseur P et de l'analyseur A.

Par conséquent, en examinant un modèle transparent et contraint en lumière polarisée monochromatique, nous observons non seulement des franges sombres, correspondant aux isochromes, mais aussi des lignes sombres reliant les points pour lesquels l'une des directions principales coïncide avec le plan de polarisation : ces courbes qui joignent les points où les contraintes principales ont les mêmes directions s'appellent des isoclines.

Si l'on fait tourner simultanément les 2 prismes de Nicol (polariseur P et analyseur A), tout en les maintenant croisés et si l'on trace les lignes sombres sur l'image de la plaque contrainte pour diverses orientations du plan de polarisation, on obtiendra le système d'isoclines.

c) Isostatiques :

On appelle isostatiques les courbes donnant en chaque point d'une pièce les directions des contraintesprincipales σ_1 et σ_2. Elles constituent donc un réseau orthogonal que l'on désigne souvent sous le nom de réseau p et de réseau q . Il est facile de passer du système des isoclines observées sur l'écran au système des isostatiques sur le modèle transparent contraint en observant qu'une rotation des 2 prismes du polariscope est équivalent, en valeur relative, à une rotation en sens inverse du modèle. On choisira donc des axes de référence (directions horizontale et verticale par exemple) et l'on reportera les angles d'inclinaison du polariscope en sens inverse des aiguilles d'une montre à partir des isoclines. C'est ainsi que pour une inclinaison de 15° du polariscope, on obtient un réseau d'isoclines dénommé isoclines 15° et en tous les points de ce réseau les contraintes principales seront inclinées de 15° par rapport à l'horizontale et à la verticale. La pratique du tracé est indiquée dans l'annexe III.

4 - Polariscope circulaire

Nous venons de voir que si une plaque contrainte est placée dans un polariscope plan, on observe 2 réseaux distincts de franges : les isochromes et les isoclines correspondant à la valeur de α choisie. Or les franges des isoclines sont fréquemment larges et tendent à masquer les isochromes. Pour cette raison on a cherché à séparer les isoclines des isochromes : ceci est réalisé dans le polariscope circulaire dont le principe est indiqué sur la figure 18.

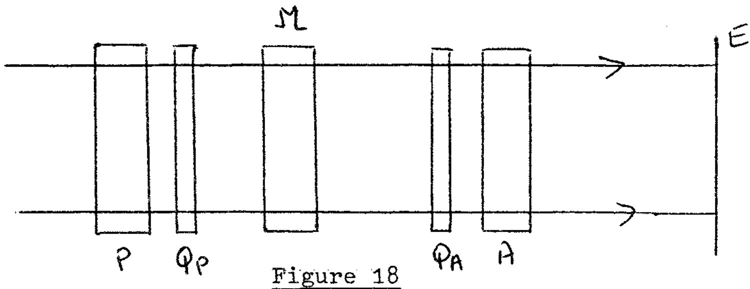


Figure 18

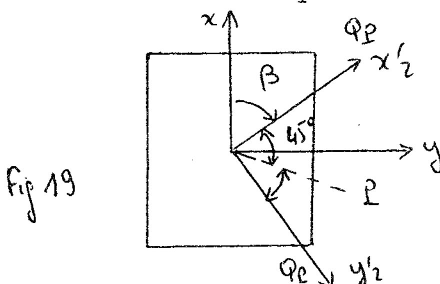
Par rapport au polariscope plan, on place de part et d'autre du modèle transparent deux lames quart d'onde Q_P et Q_A (ce sont des lames de mica ayant deux axes de polarisation et dont l'épaisseur est telle qu'elle introduit une différence de phase relative $\varphi = \pi/2$ ($\delta = \lambda/4$) entre les deux vibrations pour la lumière monochromatique utilisée). Si l'angle entre le plan de polarisation de P et l'un des axes de Q_P est égal à 45°, à la sortie de la lame Q_P, on a les composantes (cf. relations 22) :

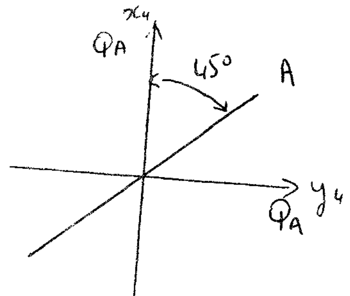
$$\begin{cases} x'_2 = \frac{a}{2} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{a}{2} \sin\omega t \\ y'_2 = \frac{a}{2} \cos\omega t \end{cases}$$

y'_2 étant l'axe rapide de la lame quart d'onde. Un point se déplaçant avec de telles composantes se déplace sur un cercle :

$$x'^2_2 + y'^2_2 = \frac{a^2}{2}$$

On dit que la lumière est polarisée circulairement (dans le sens inverse des axes de polarisation de Q_P). Soit β l'angle entre x'_2 et la direction de σ_1 (fig. 19).





Les expressions des composantes suivant les axes Ox et Oy de la lumière provenant de x'_2 et ayant traversé le modèle sont les suivantes :

$$x_3 = \frac{a}{2} \cos \left(\omega t' - \frac{\pi}{2} - \varphi\right) \quad y_3 = \frac{a}{2} \sin \omega t'$$

$$= \frac{a}{2} \cos\beta \sin (\omega t' - \varphi)$$

De même pour la lumière provenant de y'_2 :

$$x_3 = - \frac{a}{2} \sin\beta \cos(\omega t' - \varphi) \quad y_3 = \frac{a}{2} \cos\beta \cos \omega t'$$

En ajoutant chacune de ces composantes suivant les axes Ox et Oy, on obtient les expressions des composantes de la lumière à la sortie du modèle :

$$\begin{cases} x_3 = \frac{a}{2} \sin(\omega t' - \varphi - \beta) = \frac{a}{2} \sin (\omega t'' - \rho) \\ y_3 = \frac{a}{2} \cos(\omega t' - \beta) = \frac{a}{2} \cos \omega t'' \end{cases} \quad (26)$$

Les composantes peuvent être considérées comme la superposition de deux mouvements circulaires. Appelons ψ la quantité $\omega t'' - \varphi/2$, on a :

$$\begin{cases} x_3 = \frac{a}{2} \sin(\psi - \frac{\varphi}{2}) = \frac{a}{2} (\sin\psi \cos \frac{\varphi}{2} - \cos\psi\sin \frac{\varphi}{2}) \\ y_3 = \frac{a}{2} \cos(\psi + \frac{\varphi}{2}) = \frac{a}{2} (\cos\psi \cos \frac{\varphi}{2} - \sin\psi\sin \frac{\varphi}{2}) \end{cases} \quad (27)$$

Les expressions (27) représentent la superposition d'un mouvement circulaire de rayon $a/\sqrt{2} \cos \varphi/2$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (cf. fig. 19) et d'un mouvement circulaire de rayon $a/\sqrt{2} \sin\varphi/2$ dans le sens des aiguilles d'une montre.
Considérons maintenant l'effet de la lame quart onde Q_A et de l'analyseur A dans le cas où le plan de polarisation de A fait un angle de 45° avec l'axe y de Q_A (fig. 19).

Nous pouvons exprimer les composantes x_3, y_3 suivant les Ox, Oy des contraintes principales dans le système d'axes x_4, y_4 de la lame quart d'onde Q_A (y_4 est l'axe rapide). Pour un mouvement circulaire, un changement d'axes revient simplement à ajouter une constante à l'angle de phase ψ.

Le mouvement circulaire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre peut par conséquent être représenté par des composantes de la forme :

$$x_4 = b \sin \psi' \qquad y_4 = b \cos \psi' \qquad b = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \frac{\varphi}{2}$$

avec $\psi' = \omega t'' - \frac{\varphi}{2} + cte = \omega t + cte$

A la sortie de Q_A, on a :

$$x_5 = b \sin(\psi' - \frac{\pi}{2}) \qquad y_5 = b \cos \psi'$$
$$= -b \cos \psi'$$

ψ' ayant de nouveau varié d'une constante.

Les composantes du mouvement précédent le long de l'axe de l'analyseur A sont donc :

$$- b \cos \psi' \cos 45° + b \cos \psi' \cos 45° = 0$$

Le mouvement dans le sens inverse des aiguilles d'une montre est donc éliminé.

Pour la composante dans le sens des aiguilles d'une montre, on a :

$$x'_4 = - b \cos\psi' \qquad y'_4 = - b \sin\psi' \qquad b = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \frac{\varphi}{2}$$

La composante du mouvement suivant l'axe de l'analyseur est alors égale à :

(28) $$- b \cos 45° \sin\psi' - b \cos 45° \sin\psi' = -a \sin \frac{\varphi}{2} \sin\psi'$$

L'amplitude à la sortie de l'analyseur est donc proportionnelle à

$$a \sin \frac{\varphi}{2} \qquad (28)$$

Si l'on compare ce résultat à celui obtenu pour le polariscope plan (relation 23), on constate que le facteur sin 2 α a disparu et que par conséquent le polariscope circulaire élimine les isoclines sans affecter les isochromes.
Si φ = 0, l'amplitude est nulle ; ainsi en l'absence de modèle ou si celui-ci n'est pas contraint, l'écran est obscur. On a donc une représentation sur fond noir. Si l'on fait tourner de 90° l'axe de l'analyseur par rapport à Q_A, on obtiendra au contraire un fond clair et des franges lumineuses au lieu de franges sombres. Le même effet est obtenu avec un polariscope plan dans le cas où les plans de polarisation du polariseur et de l'analyseur sont parallèles au lieu d'être croisés.
Pour examiner les isoclines on pourra soit retirer les lames 1/4 d'onde soit les faire tourner de 45° par rapport à leur position initiale de façon à placer leurs axes de polarisation parallèlement aux axes du polariseur et de l'analyseur.
Remarque : Les résultats de la figure 17 obtenus au polariscope circulaire ne présentent que les isochromes.

5 - Matériaux pour photoélasticimètrie

Les matériaux utilisés en photoélasticimétrie doivent remplir un certain nombre de conditions : ils doivent être transparents et isotropes en l'absence de contraintes appliquées (ils doivent donc être exempts de contraintes résiduelles) et leur coefficient photoélastique doit être aussi grand que possible ou leur valeur de frange aussi faible que possible puisque cela correspond à une plus grande sensibilité et par conséquent à une plus grande précision de mesure. De plus ils doivent pouvoir s'usiner et se polir facilement et doivent avoir un comportement élastique.
Parmi les matériaux utilisés, nous pouvons citer :
- verre : parfait du point de vue optique, bon comportement élastique, usinage difficile, faible C = 2 à 3 brewster ou f (valeur de frange en daN par mm^2, par frange et par mm d'épaisseur) $f \simeq 14$.

- celluloïd : C = 15 brewster f = 5,3
- bakelites : C = 40 à 50 brewster. très utilisée
- plexiglas : C = 5 brewster, f = 6 Bien que sa sensibilité soit assez faible, on l'utilise très souvent. Ce matériau est très stable.
- matière plastique CR39 (Columbia Resine) : f = 1,7
- catalin : f = 0,8

Remarque :

1/ Procédé photostress

La technique photostress est un procédé d'analyse des contraintes nécessitant l'emploi de matières plastiques spéciales dont on recouvre directement les pièces des machines à étudier sous forme de vernis liquide, mélangé avec un durcisseur, ou de plaque préfabriquées. Cette technique permet la détermination des directions principales (isoclines) et de la différence des contraintes principales (isochromes) de la surface de la pièce rendue réfléchissante par une peinture métallisée.

2/ Photoélasticité tridimensionnelle

On peut déterminer les contraintes dans les maquettes tridimensionnelles par le procédé connu sous le nom de "figeage des contraintes"; Ce procédé, imaginé par Oppel en 1935, consiste à porter à une température déterminée (voisine de 110°C pour l'araldite, de 80-85°C pour le CR39 et le catalin 800) la maquette contrainte puis à la laisser refroidir lentement sous charge. On supprime ensuite le chargement et l'on observe que la maquette a acquis une biréfringence permanente qui est une fonction exacte du système de charge utilisé. On découpe alors la maquette en éléments plans parallèles, intéressant plus particulièrement les régions à étudier et on examine les éléments comme on le ferait pour une maquette bidimensionnelle.

3/ Détermination des contraintes principales : cf. annexe III

VIII.3. METHODES ANALOGIQUES

Nous avons vu que la détermination des contraintes principales directement sur la pièce ou sur un modèle n'était pas toujours facile et qu'il est par conséquent souvent intéressant de recourir à des méthodes analogiques.
La répartition des contraintes ou des déformations satisfait à des équations différentielles harmoniques ou biharmoniques (cf. Chap. VII). Par conséquent tout phénomène physique régi par les mêmes équations peut constituer une analogie. Il s'agit donc d'un procédé expérimental permettant de résoudre les équations différentielles.
Nous verrons à propos de l'étude de la torsion la méthode de la membrane qui permet de déterminer les solutions expérimentales de l'étude de la torsion des barres de forme quelconque.
METHODE PAR ANALOGIE ELECTRIQUE :

VIII.3.1. PRINCIPE DE LA MÉTHODE

La théorie de l'élasticité montre que l'équation différentielle à laquelle satisfait la somme des contraintes principales σ_1 et σ_2 dans un domaine à deux dimensions est la suivante (cf. relation VII.18)

$$\Delta(\sigma_1+\sigma_2) = 0 \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_1+\sigma_2) = 0 \qquad (29)$$

La fonction $(\sigma_1+\sigma_2)$ est donc une fonction harmonique plane qui présente une analogie rigoureuse avec la fonction potentiel régissant l'écoulement électrique dans un corps à 2 dimensions, limité par une surface continue S, de résistivité homogène et isotrope ρ, sous l'effet de sources électriques à potentiels et débit invariables.

En fait, ce corps à 2 dimensions peut être constitué pratiquement par une lame mince à faces parallèles du genre papier télédeltos. Dans de telles conditions, il s'établit dans le corps un régime permanent de courants. Soient i_x et i_y les composantes de la densité de courant (c'est-à-dire de l'intensité par unité de surface) et ϕ (x,y) le potentiel électrique en un point quelconque de cette lame mince.

L'équation de continuité donne : $\operatorname{div} \vec{i} = 0$

$$\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} = 0$$

ceci découlant du fait que les potentiels et débits sont invariables.

Appliquons la loi d'Ohm :

$$ix = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{1}{\rho} \qquad iy = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{1}{\rho}$$

avec $R = \rho\frac{l}{S} = \rho l$ si on considère une section unité.

On peut donc écrire :

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) = 0 \text{ soit } \Delta\phi = 0 \qquad (30)$$

La forme du potentiel est donc bien une fonction harmonique, absolument analogue à celle qui représente la somme des contraintes principales dans un modèle plan.

Dans un essai photoélastique, exécuté au préalable sur un modèle, généralement à échelle réduite, on obtient le réseau complet d'isostatiques permettant de connaitre la différence des contraintes principales $\sigma_2 - \sigma_1$ en tous points du modèle.

On peut en déduire également les valeurs de la somme des contraintes principales sur la bordure du modèle, tout au moins dans les régions correspondant à un contour libre puisque, dans ces zônes, l'une des contraintes principales étant nulle, la somme des contraintes principales est égale à leur différence.

Pratiquement, on passera de l'échelle des contraintes à l'échelle des potentiels, et réciproquement, en adoptant une valeur de l'ordre de 1 volt par frange obtenue dans l'essai photoélastique.
Dans le cas d'une région où se trouve une force concentrée le nombre de franges est élevé et ne peut en général être déterminé avec précision. Par voie de conséquence, les voltages correspondants sont importants et il serait peu indiqué d'effectuer des essais analogiques avec un gradient de potentiel élevé. On peut tourner la difficulté en observant que les isochromes, situées autour du point de chargement, sont constituées par des courbes de forme elliptique. Lorsque ces courbes ne s'écartent pas trop d'un cercle, on peut en déduire que la distribution des contraintes est sensiblement une distribution radiale simple, ce qui signifie que tout élément situé à la distance r du point d'application de la force est soumis à un système de contraintes que l'on peut assimiler à une compression simple. Dans ces conditions, les lignes isochromes en question sont très voisines des lignes isopachiques (lignes d'égale somme $\sigma_1 + \sigma_2$) et l'on peut remplacer les sources de potentiel à gradient élevé, au voisinage de la bordure chargée, par un système équivalent que l'on obtiendra en portant la lisière de l'isochrome d'ordre n à un potentiel constant de n volts.

VIII.3.2. SIGNE DES CONTRAINTES

Il faut remarquer que le réseau d'isochromes obtenu sur une pièce ne fait aucune distinction entre les valeurs positives et les valeurs négatives de la différence des contraintes principales. Or, il est nécessaire de connaitre la différence des contraintes principales en valeur et en signe si l'on désire obtenir les valeurs séparées des contraintes. Dans certains cas de chargement simple, il est possible d'en déduire facilement le signe des contraintes.

Lorsque le chargement est complexe, on peut connaitre le signe d'une isochrome en exerçant une pression localisée à une extrémité aboutissant à un bord libre. En un tel point, nous désignerons par σ_1 et σ_2 les contraintes principales appartenant respectivement au réseau d'isostatique p et au réseau d'isostatique q. S'agissant d'un bord libre (conditions aux limites), l'une des contraintes est nulle, par exemple σ_1, et l'on a :

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_1 = \sigma_2$$

En exerçant une pression à l'extrémité de l'isochrome en cause, on va créer une contrainte σ_1 négative et en ce point l'isochrome $\sigma_2 - \sigma_1$ va se déplacer.
Il est facile de vérifier que, si l'isochrome initiale $\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma_2$ est positive, le déplacement se fera dans le sens d'une augmentation du chargement, sens que l'on a pu observer au cours des essais. Au contraire, le déplacement sera inverse si l'isochrome initiale est négative. La connaissance du signe des isochromes est notamment indispensable pour fixer correctement les potentiels sur le bord d'une maquette représentant une éprouvette de traction comportant un trou.